Konkurs Przedmiotowy z Matematyki

dla uczniów szkół podstawowych województwa kujawsko – pomorskiego

Etap wojewódzki – 9 marca 2024 r.

Przykładowe rozwiązania i propozycja punktacji rozwiązań.

Ustalenia dotyczące punktowania zadań otwartych:

1. Jeśli uczeń przedstawił obok prawidłowej metody błędną metodę i nie dokonał wyboru żadnej z nich (np. poprzez udzielenie odpowiedzi), to rozwiązanie traktujemy jako błędne.
2. Jeśli uczeń przedstawił dwie poprawne metody rozwiązania, z których jedna zawiera błędy rachunkowe i nie dokonał wyboru żadnej z nich (np. poprzez udzielenie odpowiedzi), to punktujemy rozwiązanie, które nie zawiera błędów rachunkowych.
3. Poprzez określenie „obliczył prawidłowo” rozumiemy, że uczeń zastosował prawidłową metodę i nie popełnił błędów rachunkowych.

Za błędy rachunkowe na dowolnym etapie rozwiązania zadania odejmujemy tylko 1 punkt w tym zadaniu.

Jeśli uczeń rozwiąże zadanie inną metodą niż została zaproponowana w Przykładowych rozwiązaniach, to na Wiceprzewodniczącym Komisji Wojewódzkiej spoczywa obowiązek rozstrzygnięcia poprawności zaprezentowanej metody.

Karta odpowiedzi arkusza zadań

Zadanie 1	A	B	C	**D**
Zadanie 2	**A**	B	C	D
Zadanie 14	A	B	**C**	D

Zadanie 9	A	P	**F**
	B	**P**	F
	C	**P**	F
	D	P	**F**
	E	P	**F**

Zadanie 1 (0 - 1)

Ile wynosi $(1{,}25 \cdot 10^{-5}) \cdot (8 \cdot 10^{115})$?

A. 10^{-2} B. 10^{23} C. 10^{110} D. 10^{111}

Rozwiązanie:

$$(1{,}25 \cdot 10^{-5}) \cdot (8 \cdot 10^{115}) = 0{,}0000125 \cdot 8 \cdot 10^{110+5} = 0{,}0000125 \cdot 10^{5} \cdot 8 \cdot 10^{110}$$
$$= 1{,}25 \cdot 8 \cdot 10^{110} = 10 \cdot 10^{110} = 10^{111}$$

lub

$$(1{,}25 \cdot 10^{-5}) \cdot (8 \cdot 10^{115}) = 1{,}25 \cdot 8 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{115} = 10 \cdot 10^{-5+115} = 10^{1+110} = 10^{111}$$

Zadanie 2 (0 - 1)

Kasia czytając książkę zauważyła, że numer strony, którą właśnie przeczytała, dzieli się przez 2, 3 i 5. Cyfrą jedności numeru następnej strony tej książki jest:

A. 1 B. 3 C. 5 D. 6

Rozwiązanie:

Liczba podzielna przez 2 i 5 jest podzielna przez 10, zatem cyfrą jedności numeru następnej strony jest 1.

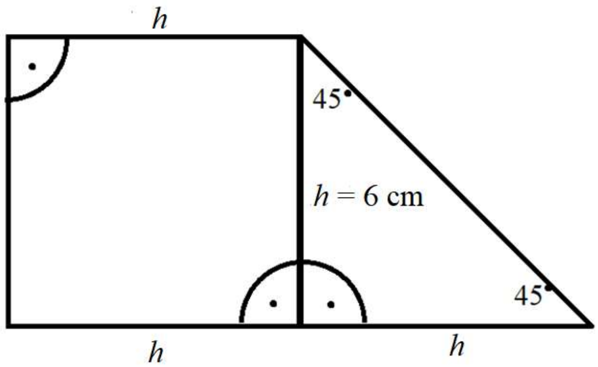
Zadanie 9 (0 - 5)

W trapezie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego ma długość 6 cm i dzieli ten trapez na kwadrat i trójkąt prostokątny równoramienny.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe lub F, jeśli zdanie jest fałszywe.

A	Pole tego trapezu wynosi $32\ \mathrm{cm}^2$.	P	F
B	Jeden z kątów wewnętrznych tego trapezu ma miarę $135°$.	P	F
C	Pole otrzymanego trójkąta prostokątnego stanowi połowę pola kwadratu.	P	F
D	Suma długości podstaw trapezu wynosi $16\ \mathrm{cm}$.	P	F
E	Kąt ostry przy podstawie trapezu ma miarę $30°$.	P	F

Rozwiązanie:
Wykonamy rysunek uwzględniając informacje z treści zadania. Trapez prostokątny podzielono na 2 figury kwadrat i trójkąt prostokątny równoramienny. Zatem wysokość trapezu jest bokiem kwadratu. Druga figura to trójkąt prostokątny równoramienny, zatem przyprostokątne są równe i wynoszą tyle co wysokość trapezu, a kąty przy podstawie mają po $45°$.



$$P_{trapezu} = \frac{(6+12)\cdot 6}{2} = 18 \cdot 3 = 54\ [\mathrm{cm}^2]$$

$$P_{kwadratu} = 6 \cdot 6 = 36\ [\mathrm{cm}^2]$$

$$P_{trójkąta} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 3 \cdot 6 = 18\ [\mathrm{cm}^2]$$

Kąt rozwarty trapezu wynosi
$$90° + 45° = 135°$$
Kąt ostry trapezu wynosi $45°$.

Zadanie 14 (0 - 2)
Producent bakalii zmniejszył zawartość opakowania o 20 g nie zmieniając jego ceny. W ten sposób cena 1 kg bakalii wzrosła o 25%. Ile bakalii zawierało opakowanie na początku?

A. 60 g B. 80 g C.100 g D. 125 g

Rozwiązanie:
x – waga opakowania na początku

$$\frac{x-(x-20)}{x-20} = 0{,}25$$

$$\frac{20}{x-20} = \frac{1}{4}$$

$$x - 20 = 80$$

$$x = 100\ \mathrm{g}$$

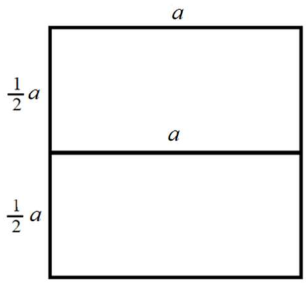
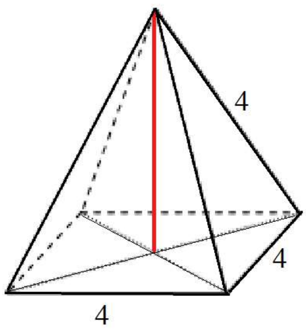
Przykładowe rozwiązania i propozycja punktacji zadań 3 - 8 oraz 10 - 13.

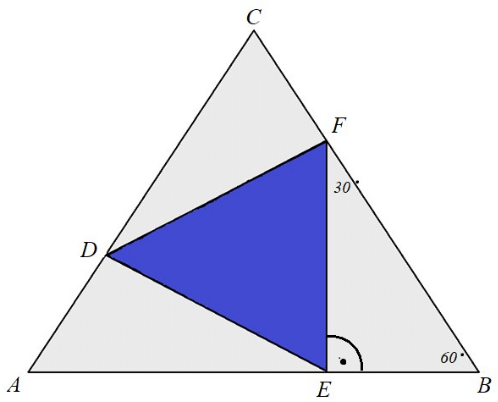
Numer zadania	Odpowiedź	Przykładowe rozwiązanie	Propozycja punktacji
3	16 lat	Metoda wyznaczenia wieku każdej z dziewcząt. oznaczmy: wiek Kasi x wiek Julii $x-5$ wiek Ali $x-5-4 = x-9$ $x+x-5+x-5-4=34$ lub $3x-14=34$	1
		$3x=48$ $x=16$ Prawidłowa odpowiedź: 16 lat.	1
4	$72\ \mathrm{km}$	Metoda obliczenia drogi. *I sposób* $4\ \mathrm{h} = 4\cdot 60\ \mathrm{min} = 240\ \mathrm{min} = 240\cdot 60\ \mathrm{s} = 14\,400\ \mathrm{s}$ $14\,400\cdot 5\ \mathrm{m} = 72\,000\ \mathrm{m} = 72\ \mathrm{km}$ *II sposób* $5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}=5\cdot\frac{\frac{1}{1000}\ \mathrm{km}}{\frac{1}{3600}\ \mathrm{h}}=5\cdot\frac{3600}{1000}\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}=18\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ $18\ \mathrm{km\ w\ 1\ h,\ zatem\ w\ 4h:}\quad 4\cdot 18\ \mathrm{km} = 72\ \mathrm{km}$	1
		Prawidłowa odpowiedź: $72\ \mathrm{km}$.	1
5	$3:2$	Metoda wyznaczenia sumy lat drużyny. Niech: c – liczba chłopców d – liczba dziewcząt $(c+d)\cdot 13$ – suma lat drużyny oraz $15c+10d$ – suma lat drużyny.	1
		Metoda wyznaczenia stosunku liczby chłopców do liczby dziewcząt.	1

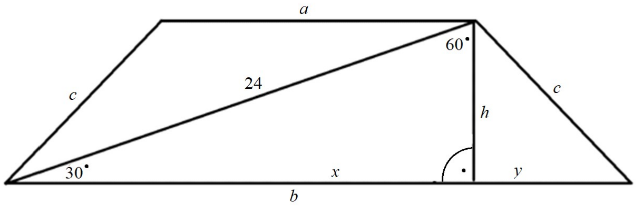
		zapisanie równania: $(c + d) \cdot 13 = 15c + 10d$ $13c + 13d = 15c + 10d$ $2c = 3d$ $c : d = 3 : 2$	
		Prawidłowa odpowiedź: Stosunek liczby chłopców do liczby dziewcząt wynosi $3 : 2$.	1
6	2 litry soku, 7 litrów napoju	Dwie zmienne wielkości dodatnie nazywamy wprost proporcjonalnymi, jeżeli iloraz odpowiadających sobie wartości tych wielkości jest stały. Wyznaczenie stosunku napoju do soku. 48 : 9,6 = 5	1
		Metoda wyznaczenia zawartości soku w 10 litrach napoju. 10 : 5 = 2 Prawidłowa odpowiedź: W 10 litrach napoju znajdują się 2 litry soku.	1
		Metoda wyznaczenia liczby litrów napoju, aby zawierał on 1,4 litra soku. 1,4 · 5 = 7 Prawidłowa odpowiedź: Należy przygotować 7 litrów napoju, aby zawierał on 1,4 litra soku.	1
7	10 cm	Metoda wyznaczenia długości przekątnych rombu. Oznaczmy długość przekątnych rombu i jego bok odpowiednio symbolami: $e, 3e$ i a. Wykorzystując wzór na pole rombu mamy: $\frac{e \cdot 3e}{2} = 60$ $3e^2 = 120$ $e = 40 = 2\sqrt{10}$ $3e = 6\sqrt{10}$	1

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td>Metoda wyznaczenia długości boku rombu.
Stosując twierdzenie Pitagorasa dostajemy
$$\left(\frac{1}{2}e\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cdot 3e\right)^2=a^2$$
$$\sqrt{10}^2+\left(3\sqrt{10}\right)^2=a^2$$
$$10+9\cdot 10=a^2$$
$$100=a^2$$
$$a=10$$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Prawidłowa odpowiedź: Długość boku rombu wynosi 10 cm.</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">8</td><td rowspan="3">$p=\frac{1}{5}$</td><td>Sposób wyznaczenia zdarzeń sprzyjających.
Uczeń zauważy, że wylosowany numer ma być większy niż 21, czyli interesuje nas łącznie 5 wyników: 22, 23, 24, 25, 26.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Sposób wyznaczenia wszystkich zdarzeń.
Uczeń zauważy, że w puli początkowo znalazło się 26 numerów, ale jeden numer, czyli "21" został już z tej puli odrzucony. To oznacza, że wtorkowe losowanie odbywa się z puli 25 numerów.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Metoda obliczenia prawdopodobieństwa.
Z tych 25 numerów interesuje nas 5 numerów, zatem prawdopodobieństwo ich wylosowania jest równe: $p=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$.

Prawidłowa odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że we wtorek wylosowany numer będzie większy niż 21 wynosi $\frac{1}{5}$.</td><td>1</td></tr>
</table>

10	$0{,}36\ \mathrm{ha}$	Metoda obliczenia boku kwadratu. $2a + 2 \cdot \frac{1}{2}a = 180\ \mathrm{m}$ $3a = 180\ \mathrm{m}$ $a = 60\ \mathrm{m}$  	1
		Metoda obliczenia powierzchni kwadratowej działki. $P = a^2 = (60\ \mathrm{m})^2 = 3600\ \mathrm{m}^2$	1
		Prawidłowa odpowieź: $3600\ \mathrm{m}^2 = 0{,}36\ \mathrm{ha}$.	1
11	$\frac{32}{3}\sqrt{2}$	 Metoda wyznaczenia połowy długości przekątnej podstawy: $\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.	1
		Metoda wyznaczenia wysokości ostrosłupa. Obliczamy ją korzystając z twierdzenia Pitagorasa: $H^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 4^2$ $H^2 = 4^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2$ $H^2 = 16 - 4 \cdot 2$ $H = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$	1
		Metoda obliczenia objętości ostrosłupa. Pole podstawy ostrosłupa: $P_p = 4 \cdot 4 = 16$	1

		Objętość ostrosłupa wynosi: $$V=\frac{1}{3}P_p\cdot H=\frac{1}{3}\cdot 16\cdot 2\sqrt{2}=\frac{32}{3}\sqrt{2}$$	
		Prawidłowa odpowiedź: Objętość ostrosłupa wynosi $\frac{32}{3}\sqrt{2}$.	1
12	3	Metoda wyznaczenia długości boku trójkąta ABC oraz trójkąta DEF.  Łatwo sprawdzić, że kąty ADE i CFD są kątami prostymi, więc trójkąty AED i CDF są przystające, jako, że mają odpowiednie kąty równe i $\|FE\|=\|DF\|$, (cecha kbk). Zatem możemy oznaczyć $\|EB\|=\|CF\|=a$. Wtedy $\|BF\|=2a,\ \ \|BC\|=3a\ \ i\ \ \|FE\|=a\sqrt{3}$.	1
		Metoda obliczenia pól trójkąta ABC oraz trójkąta DEF. $$P_{\Delta ABC}=\frac{(3a)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{9a^2\sqrt{3}}{4}$$ $$P_{\Delta DEF}=\frac{\left(a\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$	1
		Metoda obliczenia stosunku pól trójkątów ABC i DEF. $$P_{\Delta ABC}:P_{\Delta DEF=}\frac{9a^2\sqrt{3}}{4}:\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}=3$$	1

		Prawidłowa odpowiedź: Stosunek pól trójkątów ABC i DEF wynosi 3.	1
13	$144\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$	Aby obliczyć pole $P=\frac{(a+b)\cdot h}{2}$ wystarczy znaleźć długość sumy podstaw i wysokość trapezu. Metoda obliczenia wysokości trapezu. Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.  Przekątna, wysokość i część podstawy dolnej x tworzą trójkąt o kątach 30°,60°,90°, zatem jest to połowa trójkąta równobocznego, więc $h=12,\ \ x=12\sqrt{3}$.	1
		Metoda obliczenia sumy podstaw trapezu. Zauważmy, że $x=a+y=12\sqrt{3}$. Zatem suma obu podstaw trapezu wynosi $a+b=a+x+y=a+a+y+y=2(a+y)=$ $2\cdot 12\sqrt{3}=24\sqrt{3}$.	1
		Metoda obliczenia pola trapezu: $P=\frac{(a+b)\cdot h}{2}=\frac{24\sqrt{3}\cdot 12}{2}=144\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$.	1
		Prawidłowa odpowiedź: Pole trapezu wynosi $144\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$.	1

Konkurs Przedmiotowy z Matematyki

dla uczniów szkół podstawowych województwa kujawsko – pomorskiego

Etap wojewódzki – 9 marca 2024 r.

Zadanie 1 (0 - 1)

Ile wynosi $(1{,}25 \cdot 10^{-5}) \cdot (8 \cdot 10^{115})$?

A. 10^{-23} B. 10^{23} C. 10^{110} D. 10^{111}

Zadanie 2 (0 - 1)

Kasia czytając książkę zauważyła, że numer strony, którą właśnie przeczytała, dzieli się przez 2, 3 i 5. Cyfrą jedności numeru następnej strony tej książki jest:

A. 1 B. 3 C. 5 D. 6

Zadanie 3 (0 - 2)

Kasia jest o 5 lat starsza od Julii, a Julia jest o 4 lata starsza od Ali. Suma lat dziewcząt wynosi 34 lata. Ile lat ma najstarsza z nich?

Zadanie 4 (0 - 2)

Ile kilometrów pokona rowerzysta w ciągu 4 godzin, jeżeli jedzie ze stałą prędkością $5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$?

Zadanie 5 (0 - 3)

Średnia wieku zawodników pewnej drużyny pływackiej wynosi 13 lat. Średnia wieku chłopców z tej drużyny wynosi 15 lat, a średnia wieku dziewcząt wynosi 10 lat. Jaki jest stosunek liczby chłopców do liczby dziewcząt w tej drużynie?

Zadanie 6 (0 - 3)

W 48 litrach napoju wiśniowego znajduje się 9,6 litra soku. Ile soku znajduje się w 10 litrach takiego napoju? Ile litrów napoju należy przygotować, aby zawierał on 1,4 litra soku?

Zadanie 7 (0 - 3)

W rombie o polu $60\ \mathrm{cm}^2$ jedna z przekątnych jest trzy razy dłuższa od drugiej. Ile wynosi długość boku rombu?

Zadanie 8 (0 - 3)

W pewnej szkole codziennie losowany jest tak zwany szczęśliwy numerek, który zwalnia ucznia z pisania kartkówek i odpowiedzi ustnej. W puli znajdują się numery od 1 do 26. W poniedziałek rozpoczęto nową turę i wylosowano numer 21 i tym samym odrzucono go z puli losowań na kolejny dzień. Jakie jest prawdopodobieństwo, że we wtorek wylosowany numer będzie większy niż 21?

Zadanie 9 (0 - 5)

W trapezie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego ma długość 6 cm i dzieli ten trapez na kwadrat i trójkąt prostokątny równoramienny.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe lub F, jeśli zdanie jest fałszywe.

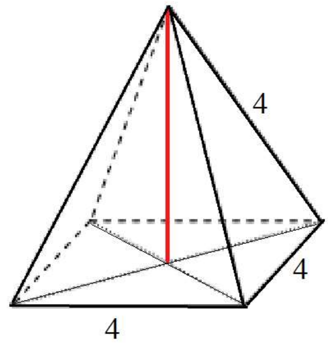
A	Pole tego trapezu wynosi $32\ \mathrm{cm}^2$.	P	F
B	Jeden z kątów wewnętrznych tego trapezu ma miarę $135°$.	P	F
C	Pole otrzymanego trójkąta prostokątnego stanowi połowę pola kwadratu.	P	F
D	Suma długości podstaw trapezu wynosi $16\ \mathrm{cm}$.	P	F
E	Kąt ostry przy podstawie trapezu ma miarę $30°$.	P	F

<u>Zadanie 10</u> (0 - 3)

Pan Kowalski postanowił swoją kwadratową działkę podzielić po równo pomiędzy dwóch synów. Każdy z nich otrzymał identyczną prostokątną działkę o obwodzie 180 m. Jaką powierzchnię ma działka pana Kowalskiego. Odpowiedź wyraź w hektarach.

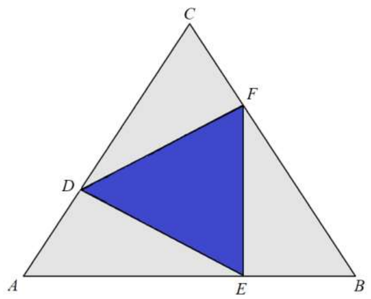
<u>Zadanie 11</u> (0 - 4)

Każda krawędź ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 4.
Oblicz jego objętość.



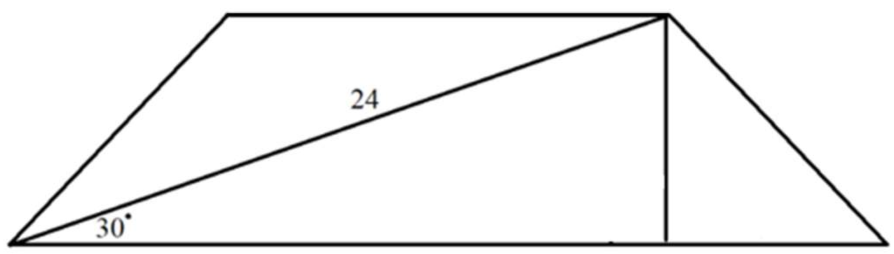
<u>Zadanie 12</u> (0 - 4)

W trójkąt równoboczny *ABC* wpisano trójkąt równoboczny *DEF* tak, że boki *AB* i *EF* są prostopadłe. Ile wynosi stosunek pól trójkątów *ABC* i *DEF*?



<u>Zadanie 13</u> (0 - 4)

W trapezie równoramiennym przekątna ma długość 24 cm i tworzy z dłuższą podstawą kąt 30°. Jakie jest pole tego trapezu?



<u>Zadanie 14</u> (0 - 2)

Producent bakalii zmniejszył zawartość opakowania o 20 g nie zmieniając jego ceny. W ten sposób cena 1 kg bakalii wzrosła o 25%. Ile bakalii zawierało opakowanie na początku?

A. 60 g B. 80 g C.100 g D. 125 g