Wojewódzki Konkurs Przedmiotowy z matematyki dla uczniów szkół podstawowych województwa kujawsko – pomorskiego etap wojewódzki – 22.02.2020

Przykładowe rozwiązania i propozycja punktacji rozwiązań.

Ustalenia dotyczące punktowania zadań otwartych:

1. Jeśli uczeń przedstawił **obok prawidłowej metody błędną metodę** i nie dokonał wyboru żadnej z nich (np. poprzez udzielenie odpowiedzi), to rozwiązanie traktujemy jako błędne.
2. Jeśli uczeń przedstawił **dwie poprawne metody rozwiązania**, z których jedna zawiera błędy rachunkowe i nie dokonał wyboru żadnej z nich (np. poprzez udzielenie odpowiedzi), to punktujemy rozwiązanie, które nie zawiera błędów rachunkowych.
3. Poprzez określenie „obliczył prawidłowo” rozumiemy, że uczeń zastosował prawidłową metodę i nie popełnił błędów rachunkowych.

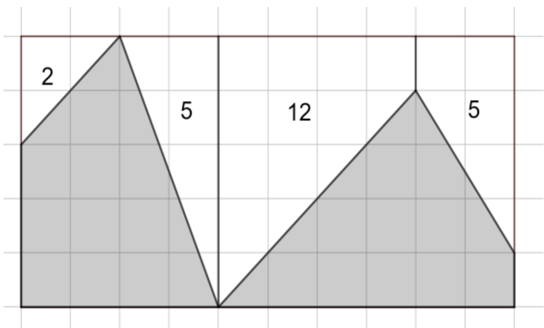
Za błędy rachunkowe na dowolnym etapie rozwiązania zadania odejmujemy tylko 1 punkt.

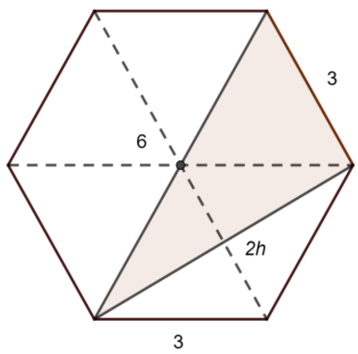
Jeśli uczeń rozwiąże zadanie inną metodą niż została zaproponowana w Przykładowych rozwiązaniach, to na Wiceprzewodniczącym Komisji Wojewódzkiej spoczywa obowiązek rozstrzygnięcia poprawności zaprezentowanej metody.

Karta odpowiedzi arkusza zadań

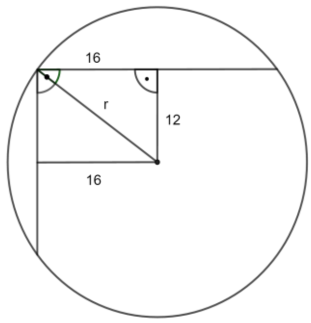
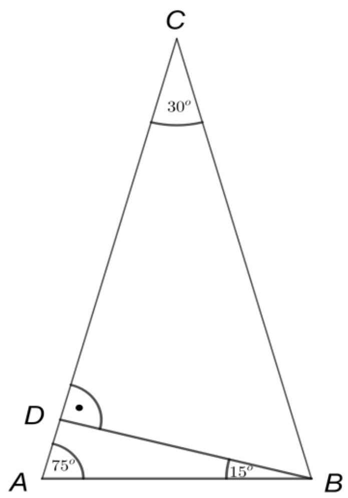
Zadanie 1	A	**P**	F
	B	**P**	F
Zadanie 2	A	**P**	F
	B	P	**F**
Zadanie 3	A	$5\sqrt{2}$ cm	
	B	150 cm^2	
	C	125 cm^3	

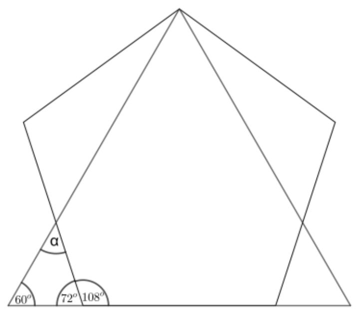
Przykładowe rozwiązania i propozycja punktacji zadań 4 – 13

Numer zadania	Odpowiedź	Przykładowe rozwiązanie	Propozycja punktacji
4	2^{10} lub 1024	$\underbrace{2+2+\cdots+2}_{1024} = 1024 \cdot 2 = 2^{10} \cdot 2 = 2^{11}$	1
		Prawidłowa odpowiedź: 2^{10} lub 1024.	1
5	48%	Obliczenie pola prostokąta $P = 5 \cdot 10 = 50\ j^2$ oraz metoda wyznaczenia części obszaru niezamalowanego w prostokącie  $2 + 5 + 12 + 5 = 24\ j^2$	1
		Prawidłowa odpowiedź: $\frac{24}{50} \cdot 100\% = 48\%$.	1

<table>
<tr><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">$80\ cm$</td><td>Metoda wyznaczenia długości średnic kół:
$l_1 = 90\pi = d_1 \cdot \pi$ $P_2 = 25\pi = \pi {r_2}^2$
$d_1 = 90\ cm$ $r_2 = 5\ cm$
$d_2 = 10\ cm$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Prawidłowa odpowiedź: 90 *cm* – 10 *cm* = 80 *cm*.</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">7</td><td rowspan="2">$9 + \sqrt{3}$</td><td>Metoda wyznaczenia długości boków trójkąta:


$2h = 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Prawidłowa odpowiedź: $6 + 3 + 3\sqrt{3} = 9 + 3\sqrt{3}$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">8</td><td rowspan="2">4 *cm*, 6 *cm*, 8 *cm*</td><td>Metoda wyznaczenia długości krawędzi prostopadłościanu
$2x \cdot 3x \cdot 4x = 192$
$24x^3 = 192$
$x^3 = 8$
$x = 2$
$2x = 4$; $3x = 6$; $4x = 8$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Prawidłowa odpowiedź: 4 *cm*, 6 *cm*, 8 *cm*.</td><td>1</td></tr>
</table>

9	20 cm	Metoda wyznaczenia długości promienia okręgu. Z twierdzenia Pitagorasa: $$12^2 + 16^2 = r^2$$  	1
		Prawidłowa odpowiedź: r = 20 cm.	1
10	8	Prawidłowa metoda wyznaczenia liczby cukierków miętowych: x – ilość cukierków miętowych $$\frac{x}{x+12} = \frac{2}{5}$$ $$2x + 24 = 5x$$ $$3x = 24$$ $$x = 8$$	1
		Prawidłowa odpowiedź: cukierków miętowych było 8.	1
11	30°	 	1

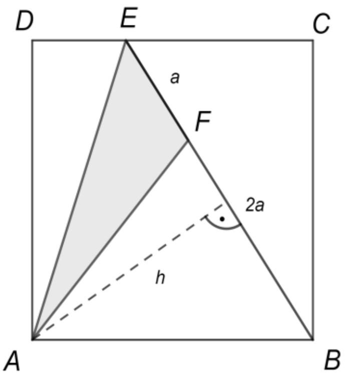
		Prawidłowa metoda obliczenia miar kątów: $\angle DAB = 180^{o} - (90^{o} + 15^{o}) = 75^{o}$ $\angle ACB = 180^{o} - 2 \cdot 75^{o} = 30^{o}$	
		Prawidłowa odpowiedź: $\angle ACB = 30^{o}$.	1
12	4 i $\frac{1}{4}$	Prawidłowa metoda wyznaczenia liczb: x – pierwsza liczba; $\frac{1}{x}$ – liczba odwrotna do pierwszej liczby $x = 16 \cdot \frac{1}{x}$ $x^2 = 16$ $x = 4$ lub x – pierwsza liczba; $\frac{1}{x}$ – liczba odwrotna do pierwszej liczby $16x = \frac{1}{x}$ $16x^2 = 1$ $x^2 = \frac{1}{16}$ $x = \frac{1}{4}$	1
		Prawidłowa odpowiedź: 4 i $\frac{1}{4}$.	1
13	48^{o}	Metoda wyznaczenia kątów wewnętrznych małego trójkąta $\alpha = 180^{o} - (60^{o} + 72^{o}) = 48^{o}$ 	1
		Prawidłowa odpowiedź: $\alpha = 48^{o}$.	1

Przykładowe rozwiązania i propozycja punktacji zadań 15 - 17

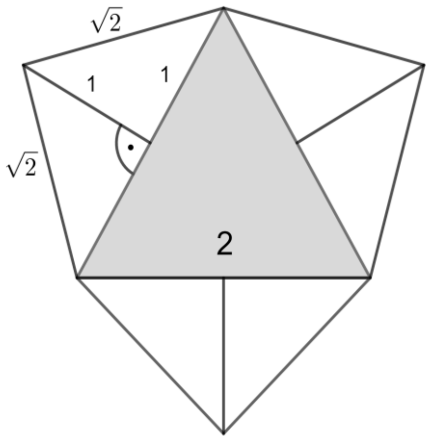
<table>
<tr><th>Nr zadania</th><th>Przykładowe rozwiązanie</th><th>Propozycja punktacji</th></tr>
<tr><td rowspan="3">14</td><td>Uczeń zauważy, że trójkąty ABF i AFE mają wspólną wysokość, a podstawa trójkąta ABF jest 2 razy większa od podstawy trójkąta AFE, więc:

$P_{ABF} = 2 \cdot P_{AFE} = 2 \cdot 10\ cm^2$

oraz $P_{ABE} = P_{ABF} + P_{AFE} = 10\ cm^2 + 20\ cm^2 = 30\ cm^2$


</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Prawidłowa metoda obliczenia pola kwadratu ABCD:
$P_{ABCD} = 2 \cdot P_{ABE} = 2 \cdot 30\ cm^2 = 60\ cm^2$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Prawidłowa odpowiedź: $P_{ABCD} = 60\ cm^2$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">15</td><td>Prawidłowa metoda obliczenia liczby obrotów wykonanych przez małe koło:
x – liczba obrotów wykonanych przez małe koło
$l_D \cdot (x - 44) = l_M \cdot x$
$1{,}5\pi \cdot (x - 44) = 0{,}3\pi \cdot x$
$1{,}5x - 66 = 0{,}3x$
$x = 55$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Prawidłowa metoda obliczenia odległości, jaką przejechał bicykl:
$l = 0{,}3 \cdot 3 \cdot 55 = 49{,}5\ m$ lub $l = 1{,}5 \cdot 3 \cdot (55 - 44) = 4{,}5 \cdot 11 = 49{,}5\ m$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Prawidłowa odpowiedź: Liczba obrotów wykonanych przez małe koło to 55.
Odległość, jaką pokonał bicykl to 49,5 m.</td><td>1</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="3">16</td>
<td>



Prawidłowa metoda wyznaczenia długości krawędzi podstawy:

$$P_p = \sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$4 = a^2$$
$$a = 2$$

</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td>

Prawidłowa metoda obliczenia pola powierzchni bocznej:

<u>I sposób:</u>

Uczeń zauważa, że powierzchnia boczna składa się z trzech przystających trójkątów prostokątnych o przyprostokątnej równej $\sqrt{2}$:

$$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 3$$

<u>II sposób:</u>

Uczeń zauważa, że powierzchnia boczna składa się z trzech kwadratów o boku 1:

$$P_b = 3 \cdot 1^2 = 3$$

<u>III sposób:</u>

Uczeń zauważa, że powierzchnia boczna składa się z 1,5 kwadratów o boku $\sqrt{2}$ lub przekątnej 2:

$$P_b = 1{,}5 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3 \qquad \text{lub} \qquad P_b = 1{,}5 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} = 3$$

Uczeń może otrzymać 1 pkt jeżeli prawidłowo obliczy długość krawędzi bocznej $\sqrt{2}$.

Uwaga! Za błąd rachunkowy na dowolnym etapie rozwiązania odejmujemy 1 pkt.

</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td>Prawidłowa odpowiedź: $3 + \sqrt{3}$.</td>
<td>1</td>
</tr>
</table>

17	<u>I sposób:</u> x – wiek Aleksandra Wielkiego Uczeń zauważa zależności: a) Gdyby Aleksander żył (x – 5) lat, to panowałby $\frac{1}{4}$ (x – 5) lat: b) Gdyby Aleksander żył (x + 9) lat, to panowałby $\frac{1}{2}(x+9)$ lat.	1
	Uczeń zapisuje i prezentuje prawidłową metodę rozwiązania równania: $$\frac{1}{4}(x-5)+5=\frac{1}{2}(x+9)-9$$	1
	Prawidłowa odpowiedź: Aleksander Wielki żył 33 lata.	1
	Prawidłowa odpowiedź: Aleksander Wielki panował 12 lat.	1
	<u>II sposób:</u> x – wiek Aleksandra Wielkiego y – tyle lat panował Aleksander Wielki Gdyby Aleksander Wielki żył 5 lat krócej, to: x – 5 = 4 (y – 5) Gdyby Aleksander Wielki żył 9 lat dłużej, to: x + 9 = 2 (y + 9)	1
	Metoda rozwiązania układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi: $$\begin{cases} x-5=4(y-5) \\ x+9=2(y+9) \end{cases}$$	1
	Prawidłowa odpowiedź: Aleksander Wielki żył 33 lata.	1
	Prawidłowa odpowiedź: Aleksander Wielki panował 12 lat.	1

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<u>III sposób:</u>
Metoda „prób i błędów”:
Uczeń zauważa, że gdyby Aleksander Wielki żył 5 lat krócej, to jego wiek musiał być wyrażony liczbą podzielną przez 4, więc najmniejszą liczbą spełniającą warunek jest 4.
Uczeń zauważa, że gdyby Aleksander Wielki żył 9 lat dłużej, to jego wiek musiał być wyrażony liczbą podzielną przez 2.
</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>
Uczeń sprawdza wszystkie możliwości spełniające warunki zadania:
<table>
<tr><th>Faktyczny wiek Aleksandra Wielkiego</th><th>Wiek Aleksandra Wielkiego, gdyby żył 5 lat krócej</th><th>Tyle lat panował Aleksander Wielki</th><th>Wiek Aleksandra Wielkiego, gdyby żył 9 lat dłużej</th><th>Tyle lat panował Aleksander Wielki</th><th></th></tr>
<tr><td>9</td><td>4</td><td>0,25 · 4 + 5 = 6</td><td>18</td><td>0,5 · 18 – 9 = 0</td><td>-</td></tr>
<tr><td>13</td><td>8</td><td>0,25 · 8 + 5 = 7</td><td>22</td><td>0,5 · 22 – 9 = 2</td><td>-</td></tr>
<tr><td>17</td><td>12</td><td>0,25 · 12 + 5 = 8</td><td>26</td><td>0,5 · 26 – 9 = 4</td><td>-</td></tr>
<tr><td>21</td><td>16</td><td>0,25 · 16 + 5 = 9</td><td>30</td><td>0,5 · 30 – 9 = 6</td><td>-</td></tr>
<tr><td>25</td><td>20</td><td>0,25 · 20 + 5 = 10</td><td>34</td><td>0,5 · 34 – 9 = 8</td><td>-</td></tr>
<tr><td>29</td><td>24</td><td>0,25 · 24 + 5 = 11</td><td>38</td><td>0,5 · 38 – 9 = 10</td><td>-</td></tr>
<tr><td>33</td><td>28</td><td>0,25 · 28 + 5 = 12</td><td>42</td><td>0,5 · 42 – 9 = 12</td><td>Zgadza się</td></tr>
</table>
</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Komentarz ucznia, w którym wyjaśnia, dlaczego jest to jedyne rozwiązanie.</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Prawidłowa odpowiedź: Aleksander Wielki żył 33 lata, a panował 12 lat.</td>
<td>1</td>
</tr>
</table>