Wojewódzki Konkurs Przedmiotowy
z matematyki dla uczniów gimnazjum
województwa kujawsko – pomorskiego
etap wojewódzki – 23.02.2019

Kartoteka arkusza zadań
oraz przykładowe rozwiązania i propozycja punktacji rozwiązań.

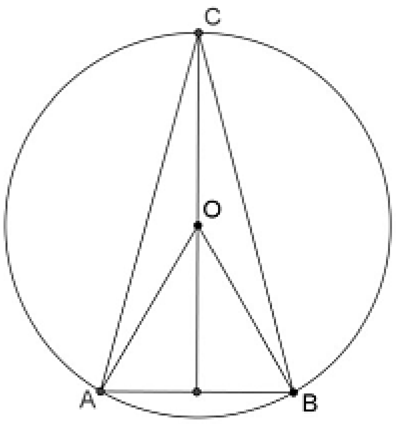
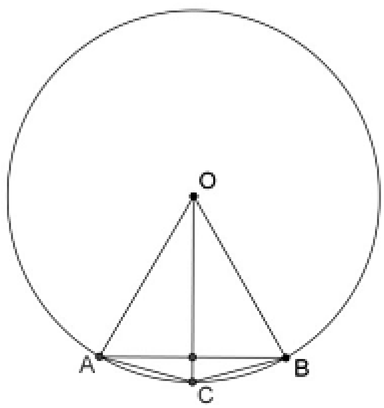
Ustalenia dotyczące punktowania zadań otwartych:

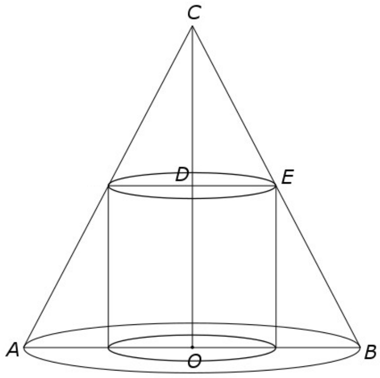
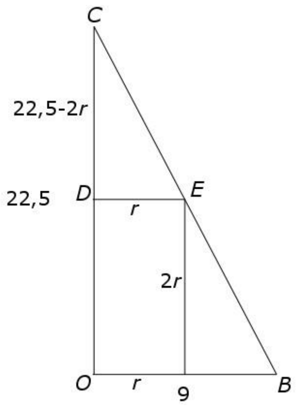
1. Jeśli uczeń przedstawił **obok prawidłowej metody błędną metodę** i nie dokonał wyboru żadnej z nich (np. poprzez udzielenie odpowiedzi), to rozwiązanie traktujemy jako błędne.
2. Jeśli uczeń przedstawił **dwie poprawne metody rozwiązania**, z których jedna zawiera błędy rachunkowe i nie dokonał wyboru żadnej z nich (np. poprzez udzielenie odpowiedzi), to punktujemy rozwiązanie, które nie zawiera błędów rachunkowych.
3. Poprzez określenie „obliczył prawidłowo” rozumiemy, że uczeń zastosował prawidłową metodę i nie popełnił błędów rachunkowych.

Za rozwiązanie każdego z zadań I części przyznajemy maksymalnie 5 punktów, zaś w II części 1 punkt.
Za błędy rachunkowe na dowolnym etapie rozwiązania zadania odejmujemy tylko 1 punkt.
Jeżeli uczeń rozwiąże zadanie metodą „prób i błędów” przyznajemy maksymalnie 2 punkty.

Jeśli uczeń rozwiąże zadanie inną metodą niż została zaproponowana w Przykładowych rozwiązaniach, to na Wiceprzewodniczącym Komisji Wojewódzkiej spoczywa obowiązek rozstrzygnięcia poprawności zaprezentowanej metody.

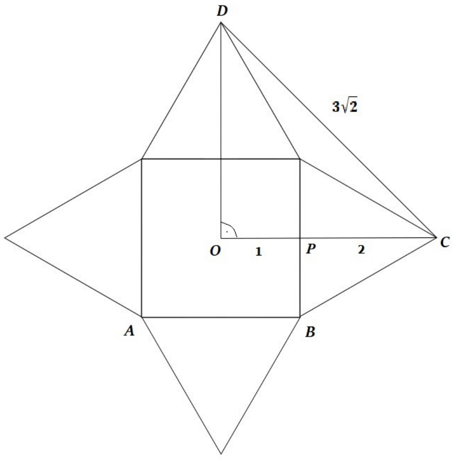
Przykładowe rozwiązania i propozycja punktacji zadań za 5 punktów

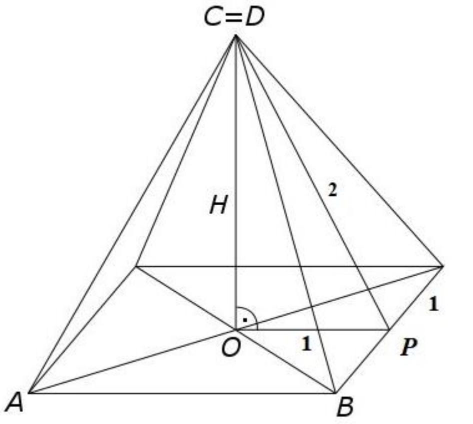
<table>
<tr><th>Nr zadania</th><th colspan="2">Przykładowe rozwiązanie</th><th>Propozycja punktacji</th></tr>
<tr><td rowspan="7">1</td><td colspan="2">Wskazanie dwóch przypadków:</td><td></td></tr>
<tr><td>I przypadek:

</td><td>II przypadek:

</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ustalenie wysokości szukanego trójkąta:</td><td></td></tr>
<tr><td>Wysokość trójkąta ABC jest sumą wysokości trójkąta równobocznego ABO i promienia OC i ma długość:
$H = 2 + \sqrt{3}$</td><td>Wysokość trójkąta ABC jest różnicą promienia OC i wysokości trójkąta równobocznego ABO i i ma długość:
$H = 2 - \sqrt{3}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Obliczenie pola szukanego trójkąta:</td><td></td></tr>
<tr><td>$P = \frac{2 \cdot (2 + \sqrt{3})}{2} = 2 + \sqrt{3}$</td><td>$P = \frac{2 \cdot (2 - \sqrt{3})}{2} = 2 - \sqrt{3}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="3">Uwaga! Jeżeli uczeń rozpatrzy tylko jeden przypadek otrzymuje 3 punkty: za rysunek, obliczenie wysokości i pola.</td></tr>
</table>

2	  Metoda wyznaczenia długości promienia walca (podobieństwo trójkątów): $$\frac{22{,}5}{9} = \frac{22{,}5 - 2r}{r}$$	1
	Obliczenie długości promienia i wysokości walca: $$22{,}5r = 9 \cdot (22{,}5 - 2r)$$ $$22{,}5r = 202{,}5 - 18r$$ $$r = 5$$ $$h = 2r = 10$$	1
	Obliczenie objętości walca: $$V_w = \pi \cdot 5^2 \cdot 10$$ $$V_w = 250\pi$$	1
	Obliczenie objętości stożka: $$V_s = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 22{,}5$$ $$V_s = 607{,}5\pi$$	1
	Obliczenie stosunku objętości stożka do objętości walca: $$\frac{V_s}{V_w} = \frac{607{,}5\pi}{250\pi} = 2{,}43$$	1

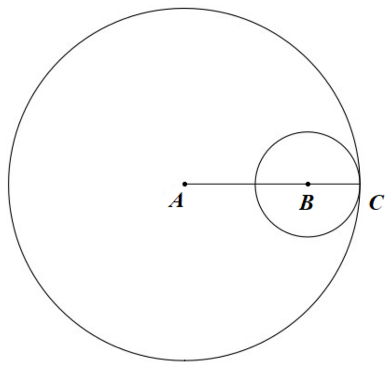
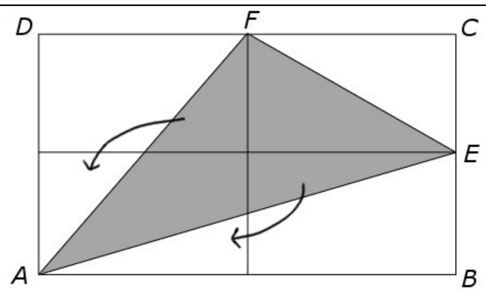
3	<u>Sposób 1:</u> Opisanie niewiadomych: Jeżeli 1 dźwig o mniejszej mocy załaduje w 1 godzinę x ton, to 3 takie dźwigi załadują w 1 godzinę $3x$ ton. m – liczba godzin ładowania statku przez jeden dźwig o mniejszej mocy. Jeżeli 1 dźwig o większej mocy załaduje w 1 godzinę y ton, to 3 takie dźwigi załadują w 1 godzinę $3y$ ton. w – liczba godzin ładowania statku przez jeden dźwig o większej mocy.	1
	Ułożenie i przekształcenie równania: $1 \cdot 3x + 2(3x + 3y) = 2{,}4(3x + 3y)$ $3x + 6x + 6y = 7{,}2x + 7{,}2y$ $9x + 6y = 7{,}2x + 7{,}2y$ $1{,}8x = 1{,}2y$	1
	Podanie zależności między niewiadomymi x i y. $x = \frac{2}{3}y$ lub $y = \frac{3}{2}x$	1
	Obliczenie czasu załadunku tylko przez jeden dźwig o mniejszej mocy: $9x + 6 \cdot \frac{3}{2}x = mx$ $18x = mx$ $m = 18$	1
	Obliczenie czasu załadunku tylko przez jeden dźwig o większej mocy: $9 \cdot \frac{2}{3}y + 6y = wy$ $12y = wy$ $w = 12$	1

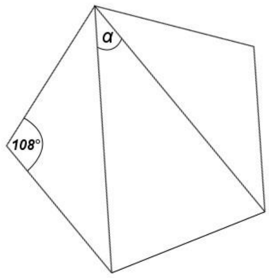
	Sposób 2: Opisanie niewiadomych: *m* – liczba godzin ładowania statku przez jeden dźwig o mniejszej mocy; *w* – liczba godzin ładowania statku przez jeden dźwig o większej mocy; $\frac{1}{m}$ – wydajność dźwigu o mniejszej mocy; $\frac{1}{w}$ – wydajność dźwigu o większej mocy	1
	Ułożenie układu równań: $\begin{cases} \frac{3}{m} + 2 \cdot \left(\frac{3}{m} + \frac{3}{w}\right) = 1 \\ \left(\frac{3}{m} + \frac{3}{w}\right) \cdot 2{,}4 = 1 \end{cases}$	1
	Rozwiązanie układu równań: $\begin{cases} \frac{9}{m} + \frac{6}{w} = 1 \\ \frac{7{,}2}{m} + \frac{7{,}2}{w} = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 9w + 6m = mw \\ 7{,}2w + 7{,}2m = mw \end{cases}$ $9w + 6m = 7{,}2w + 7{,}2m$ $1{,}8w = 1{,}2m$ $w = \frac{2}{3}m$	1
	Obliczenie *m*: $9 \cdot \frac{2}{3}m + 6m = \frac{2}{3}m \cdot m$ $12m = \frac{2}{3} \cdot m^2$ $12 = \frac{2}{3}m$ $m = 18$	1
	Obliczenie *w*: $w = \frac{2}{3} \cdot 18$ $w = 12$	1

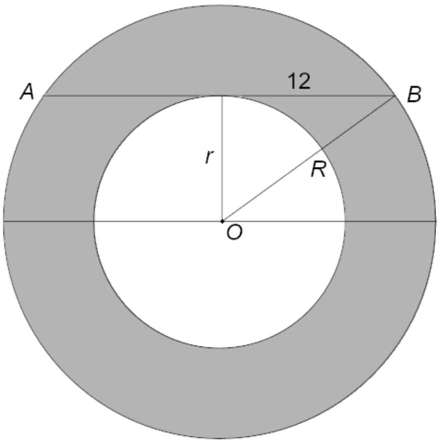
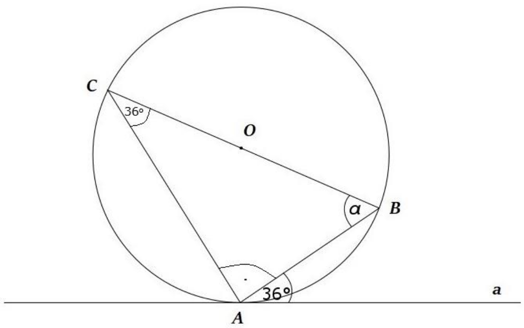
4	 Rysunek ze wskazaniem trójkąta prostokątnego *CDO* o przeciwprostokątnej *CD* = $3\sqrt{2}$.	1
	Ustalenie długości przyprostokątnych *CO* i *DO* – 3 cm Trójkąt *CDO* jest trójkątem równoramiennym prostokątnym o przeciwprostokątnej *CD* = $3\sqrt{2}$, więc przyprostokątne mają długość 3 cm. lub Wyznaczenie długości przyprostokątnych z twierdzenia Pitagorasa.	1
	Ustalenie długości wysokości ściany bocznej: $\lvert OC\rvert = \lvert OP\rvert + \lvert PC\rvert$ $3 = 1 + \lvert PC\rvert$ $\lvert PC\rvert = 2$	1

	 Obliczenie z twierdzenia Pitagorasa wysokości ostrosłupa z trójkąta *OPC*: $H^2 + 1^2 = 2^2$ $H^2 = 4 - 1$ $H = \sqrt{3}$	1
	Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$	1

Przykładowe rozwiązania i propozycja punktacji zadań za 1 punkt

Numer zadania	Odpowiedź	Przykładowe rozwiązanie
1	1 punkt wspólny	 $AC = 13$, $BC = 4$ $AB = 13 - 4 = 9$ – okręgi są styczne wewnętrznie, czyli mają jeden punkt wspólny.
2	$P = 1{,}25\ \text{m}^2$	$P = 20\ \text{cm}^2 \cdot 25^2 = 20\ \text{cm}^2 \cdot 625 = 12\,500\ \text{cm}^2$ $P = 1{,}25\ \text{m}^2$
3	$P_{ABCD} = 40\ \text{cm}^2$	 $P_{AEF} = 15\ \text{cm}^2$ $15 = \frac{1}{4} \cdot P_{ABCD} + \frac{1}{8} \cdot P_{ABCD}$ $15 = \frac{3}{8} \cdot P_{ABCD}$ $P_{ABCD} = 40\ \text{cm}^2$
4	$\frac{5}{6}$	$a = 120\%b = 1{,}2b$ $\frac{b}{a} = \frac{b}{1{,}2b} = \frac{1}{1{,}2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

5	36°	 $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$ $540^\circ : 5 = 108^\circ$ $(180^\circ - 108^\circ) : 2 = 72^\circ : 2 = 36^\circ$ $\alpha = 108^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 108^\circ - 72^\circ = 36^\circ$ lub 2α - kąt środkowy w okręgu opisanym na pięciokącie foremnym; α - kąt wpisany w okręgu opisanym na pięciokącie foremnym. $2\alpha = \frac{1}{5} \cdot 360^\circ$ $\alpha = 36^\circ$
6	$\frac{5}{12}$	12 21 **<u>31</u>** **<u>41</u>** **<u>13</u>** **<u>23</u>** 32 42 14 24 34 **<u>43</u>** $p = \frac{5}{12}$

7	144π	 $12^2 + r^2 = R^2$ $R^2 - r^2 = 144$ $P = \pi(R^2 - r^2) = 144\pi$
8	448	CD**X**LVIII = 448
9	$n = 1010$	$(n-1)^2 + 2019 = n^2$ $n^2 - 2n + 1 + 2019 = n^2$ $2n = 2020$ $n = 1010$
10	$\alpha = 54^\circ$	 $\alpha = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$

Kartoteka arkusza zadań za 5 punktów

Nr zadania	Sprawdzana czynność *Uczeń:*	Zgodność z podstawą programową kształcenia ogólnego z dnia 14 lutego 2017 r. Wymagania:	
		ogólne	szczegółowe
1	**Równania:** – zapisuje związki między nieznanymi wielkościami za pomocą układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi; – za pomocą układów równań opisuje i rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym.	IV	7.4,7
2	**Figury płaskie:** – korzysta z własności trójkątów prostokątnych podobnych. **Bryły:** – oblicza objętość walca i stożka.	III	11.2, 10.15
3	**Figury płaskie:** – stosuje twierdzenie Pitagorasa; – oblicza pola i trójkątów.	III	10.7,9
4	**Figury płaskie:** – stosuje twierdzenie Pitagorasa. **Bryły:** – Oblicza objętość ostrosłupa.	IV	11.2, 10.7

Kartoteka arkusza zadań za 1 punkt

Nr zadania	Sprawdzana czynność *Uczeń:*	Zgodność z podstawą programową kształcenia ogólnego z dnia 14 lutego 2017 r. Wymagania:	
		ogólne	szczegółowe
1	**Figury płaskie:** – rozpoznaje wzajemne położenie prostej i okręgu.	IV	10.2

2	**Figury płaskie:** – zamienia jednostki pola; – oblicza stosunek pól wielokątów podobnych.	III	10.10,12
3	**Figury płaskie:** – oblicza pola i obwody wielokątów.	IV	10.9
4	**Procenty:** – oblicza procent danej liczby.	IV	5.2
5	**Figury płaskie:** – rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności.	III	10.22
6	**Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa:** – analizuje proste doświadczenia losowe i określa prawdopodobieństwa najprostszych zdarzeń w tych doświadczeniach.	IV	9.5
7	**Figury płaskie:** – oblicza pole pierścienia kołowego; – stosuje twierdzenie Pitagorasa.	IV	10.6,7
8	**Liczby naturalne w dziesiątkowym układzie pozycyjnym:** – liczby w zakresie do 3000 zapisane w systemie rzymskim przedstawia w systemie dziesiątkowym, a zapisane w systemie dziesiątkowym przedstawia w systemie rzymskim.	I.1	I.5 Klasy IV-VI
9	**Równania:** – zapisuje związki między wielkościami za pomocą równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym związki między wielkościami wprost i odwrotnie proporcjonalnymi; – rozwiązuje równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą.	IV	7.1,3
10	**Figury płaskie:** – korzysta z faktu, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności; – rozpoznaje kąty środkowe.	III	10.3,4