Wojewódzki Konkurs Przedmiotowy z matematyki
dla uczniów szkół podstawowych województwa kujawsko - pomorskiego

Etap wojewódzki 21.04.2018

Kartoteka arkusza zadań
oraz przykładowe rozwiązania i propozycja punktacji rozwiązań

Ustalenia dotyczące punktowania zadań otwartych:

1. Jeśli uczeń przedstawił **obok prawidłowej metody błędną** i nie dokonał wyboru żadnej z nich (np. poprzez udzielenie odpowiedzi), to rozwiązanie traktujemy jako błędne.

2. Jeśli uczeń przedstawił **dwie poprawne metody rozwiązania zadania otwartego**, z których jedna zawiera błędy rachunkowe i nie dokonał wyboru żadnej z nich (np. poprzez udzielenie odpowiedzi), to punktujemy drogę, która nie zawiera błędów rachunkowych.

3. Poprzez określenie „obliczył prawidłowo" rozumiemy, że uczeń zastosował prawidłową metodę i nie popełnił błędów rachunkowych.

Za rozwiązanie każdego z zadań otwartych przyznajemy maksymalnie 5 punktów, a za każdą poprawnie udzieloną odpowiedź w zdaniu zamkniętym – 1 punkt.

Wymagamy od ucznia zapisania rozwiązania zadania otwartego oraz zapisania lub wskazania (np. przez podkreślenie) odpowiedzi.

Jeśli uczeń rozwiąże zadanie otwarte inną metodą niż została zaproponowana w *Przykładowych rozwiązaniach* i jest to metoda poprawna, to otrzymuje on maksymalną liczbę punktów. W szczególnych przypadkach na przewodniczącym Wojewódzkiej Komisji Konkursowej spoczywa obowiązek rozstrzygnięcia poprawności zaprezentowanej metody.

Kartoteka do zadań zamkniętych

Numer zadania	Sprawdzana czynność *Uczeń:*	Zgodność z podstawą programową kształcenia ogólnego z dnia 14 lutego 2017 r. Wymagania	
		ogólne	szczegółowe
1	**Działania na liczbach naturalnych** *Uczeń:* - dodaje i odejmuje w pamięci liczby naturalne dwucyfrowe lub większe.	I.1	II.1 *klasy IV-VI*
2	**Działania na liczbach naturalnych.** *Uczeń:* - odpowiada na pytania dotyczące liczebności zbiorów różnych rodzajów liczb wśród liczb z pewnego niewielkiego zakresu (np. od 1 do 200 czy od 100 do 1000), o ile liczba w odpowiedzi jest na tyle mała, że wszystkie rozważane liczby uczeń może wypisać.	I.1	II.15 *klasy IV-VI*
3	**Potęgi o podstawach wymiernych.** *Uczeń:* - mnoży i dzieli potęgi o wykładnikach całkowitych dodatnich; - podnosi potęgę do potęgi.	III.1	I.2 I.3 *klasy VII-VIII*
4	**Liczby naturalne w dziesiątkowym układzie pozycyjnym.** *Uczeń:* - liczby w zakresie do 3000 zapisane w systemie rzymskim przedstawia w systemie dziesiątkowym, a zapisane w systemie dziesiątkowym przedstawia w systemie rzymskim. **Działania na liczbach naturalnych.** *Uczeń:* - dodaje i odejmuje liczby naturalne wielocyfrowe sposobem pisemnym i za pomocą kalkulatora.	II.1	I.5 *klasy IV-VI* II.2 *klasy IV-VI*
5	**Obliczenia procentowe.** *Uczeń:* - stosuje obliczenia procentowe do rozwiązania problemów w kontekście praktycznym.	III.2	V.5 *klasy VII-VIII*
6	**Obliczenia praktyczne.** *Uczeń:* - w sytuacji praktycznej oblicza prędkość przy danej drodze i czasie oraz stosuje jednostki prędkości km/h i m/s.	III.1	XII.9 *klasy IV-VI*
7	**Obliczenia praktyczne.** *Uczeń:* - oblicza rzeczywistą długość odcinka, gdy dana jest jego długość w skali oraz długość odcinka w skali, gdy dana jest jego rzeczywista długość.	III.1	XII.8 *klasy IV-VI*
8	**Wielokąty.** *Uczeń:* - stosuje wzory na pole trójkąta.	III.1	IX.2 *klasy VII-VIII*
9	**Obliczenia w geometrii.** *Uczeń:* - oblicza obwód wielokąta o danych długościach boków; - oblicza pole kwadratu.	III.1	XI.1 XI.2 *klasy IV-VI*
10	**Geometria przestrzenna.** *Uczeń:* - oblicza objętość i pole powierzchni prostopadłościanów przy danych długościach krawędzi.	III.2	XI.5 *klasy IV-VI*

Kartoteka do zadań otwartych

Numer zadania	Sprawdzana czynność *Uczeń:*	Zgodność z podstawą programową kształcenia ogólnego z dnia 14 lutego 2017 r. Wymagania ogólne	szczegółowe
1	**Działania na liczbach naturalnych** *Uczeń:* - wyznacza wynik dzielenia z resztą liczby a przez liczbę b i zapisuje liczbę a w postaci $a = b \cdot q + r$.	II.1	II.17 *klasy IV-VI*
2	**Działania na liczbach naturalnych.** *Uczeń:* - rozpoznaje wielokrotności danej liczby; - oblicza kwadraty i sześciany liczb naturalnych. **Liczby całkowite.** *Uczeń:* - wykonuje proste rachunki pamięciowe na liczbach całkowitych. **Równania z jedną niewiadomą.** *Uczeń:* - sprawdza, czy dana liczba jest rozwiązaniem równania (stopnia pierwszego, drugiego lub trzeciego) z jedną niewiadomą.	II.1	II.14 II.10 III.5 VI.1 *klasy VII-VIII*
3	**Tworzenie wyrażeń algebraicznych z jedną lub wieloma zmiennymi.** *Uczeń:* - zapisuje zależności przedstawione w zadaniach w postaci wyrażeń algebraicznych jednej lub kilku zmiennych. **Zadania tekstowe.** *Uczeń:* - do rozwiązania zadań osadzonych w kontekście praktycznym stosuje poznaną wiedzę z zakresu arytmetyki i geometrii oraz nabyte umiejętności rachunkowe, a także własne poprawne metody. **Geometria przestrzenna.** *Uczeń:* - oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów prostych, prawidłowych i takich, które nie są prawidłowe.	III.2	III.3 *klasy VII-VIII* XIV.5 *klasy IV-VI* XI.2 *klasy VII-VIII*
4	**Własności figur na płaszczyźnie.** *Uczeń:* - przeprowadza dowody geometryczne . **Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie.** *Uczeń:* - zna i stosuje własności trójkątów równoramiennych (równość kątów przy podstawie); - zna i stosuje cechu przystawania trójkątów; - wykonuje proste obliczenia geometryczne wykorzystując sumę kątów wewnętrznych trójkąta i własności trójkątów równoramiennych.	IV.2	VIII.9 *klasy VII-VIII* VIII.5 VIII.4 VIII.7 *klasy VII-VIII*

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Numer zadania	Odpowiedź	Przykładowe rozwiązanie
1	2475	Każda liczba nieparzysta jest większa o 1 od poprzedzającej ją liczby parzystej. Mamy 45 liczb dwucyfrowych nieparzystych. Ponadto pierwsza liczba dwucyfrowa jest parzysta, a ostatnia nieparzysta. Stąd suma wszystkich liczb dwucyfrowych nieparzystych jest o 45 większa od sumy wszystkich liczb dwucyfrowych parzystych. 2430 + 45 = 2475
2	100	Najmniejszą liczbą naturalną, której zaokrąglenie do setek jest równe 500, jest liczba 450, a największą liczbą naturalną jest 549. Liczb od 450 do 549 jest 100.
3	19	$\frac{2^{3^3} \cdot 64}{2^9} = 2^{\square} \cdot 2^5$, czyli $\frac{2^{27} \cdot 2^6}{2^9} = 2^{\square} \cdot 2^5$ $2^{24} = 2^{\square} \cdot 2^5$, zatem $2^{24} = 2^{19} \cdot 2^5$
4	MDCXCIII	MCDLIX = 1459 1459 + 234 = 1693 = MDCXCIII
5	15%	50% = 0,5, 30% = 0,3 a – liczba uczniów w klasie $0{,}3 \cdot 0{,}5a = 0{,}15a$ $0{,}15 \cdot 100\% = 15\%$
6	11 km/h	60 minut : 12 minut = 5 2200 m ·5 = 11000 m = 11 km V = 11 km/h
7	19,2 cm	7,2 cm : 3 · 8 = 2,4 cm · 8 = 19,2 cm
8	96 dm^2	Przeciwprostokątna jest najdłuższym bokiem w trójkącie, więc wysokość opuszczona na przeciwprostokątną jest najkrótszą z trzech wysokości. Zatem przyprostokątne tego trójkąta mają długości 12 dm i 16 dm. Pole trójkąta prostokątnego jest równe połowie iloczynu długości jego przyprostokątnych, zatem $P = \frac{1}{2} \cdot 12\text{ dm} \cdot 16\text{ dm} = 9{,}6\text{ dm}^2$.
9	25 cm^2	Suma długości krótszego i dłuższego boku prostokąta wynosi 10cm, a zatem jego obwód jest równy 20 cm. Obwody kwadratu i prostokąta są równe, czyli długość boku kwadratu wynosi 20 cm : 4 = 5 cm. $P_{kwadratu} = (5\text{ cm})^2 = 25\text{ cm}^2$
10	8	a – długość krawędzi sześcianu Z warunków zadania otrzymujemy $6a^2 = 12a$, zatem $a = 2$. $V_{sześcianu} = 2^3 = 8$

Przykładowe rozwiązania i propozycja punktacji zadań otwartych

Zadanie 1. (0 - 5)

Rozwiązując zadanie uczeń ma do pokonania dwie trudności.

1. Rozpoznanie, która liczba nie może być resztą w dzieleniu liczby a przez liczbę b.
   lub
   Rozpoznanie, która liczba nie może być dzielnikiem w dzieleniu liczby a przez liczbę b.
2. Zapisanie liczby a w postaci $a = b \cdot q + r$.

Przykładowe rozwiązanie
Liczba, która jest resztą z dzielenia musi być mniejsza od dzielnika, więc możliwe reszty to: 30, 31 i 32. Liczba 30 nie może być dzielnikiem, gdyż żadna z liczb 30, 31, 32, 33 nie mogłaby być resztą. 1. Załóżmy, że resztą jest liczba 30. Wówczas dzielną może być jedna z trzech liczb: • $31 \cdot 32 + 30 = 1022$, • $31 \cdot 33 + 30 = 1053$, • $32 \cdot 33 + 30 = 1086$. Żadna z otrzymanych liczb nie jest liczbą trzycyfrową, czyli liczba 30 nie może być resztą. 2. Załóżmy, że resztą jest liczba 31. Wówczas dzielną może być jedna z trzech liczb: • $30 \cdot 32 + 31 = \underline{991}$, • $30 \cdot 33 + 31 = 1021$, • $32 \cdot 33 + 31 = 1087$. Tylko w jednym przypadku otrzymujemy liczbę trzycyfrową. 3. Załóżmy, że resztą jest liczba 32. Wówczas dzielną może być jedna z dwóch liczb: • $30 \cdot 33 + 32 = 1032$, • $31 \cdot 33 + 32 = 1055$. Żadna z otrzymanych liczb nie jest liczbą trzycyfrową, czyli liczba 32 nie może być resztą.
Odpowiedź: Szukaną liczbą jest 991. Zadanie ma tylko jedno rozwiązanie.

Punktacja

Punkty	Poziom zaawansowania rozwiązania
0	Uczeń wykonuje przypadkowe działania, które świadczą o tym, że nie zrozumiał treści zadania. *lub* Uczeń rozwiązuje zadanie popełniając liczne błędy rachunkowe. *lub* Uczeń podaje odpowiedź bez wykonywania obliczeń.
1	Uczeń poprawnie wyznacza tylko te liczby, które mogą być resztą w dzieleniu. (Nie musi zapisywać uzasadnienia, które to liczby, ale z zapisu rozwiązania wynika, że liczba 33 nie może być resztą.) *lub* Uczeń poprawnie wyznacza tylko te liczby, które mogą być dzielnikiem w dzieleniu. (Nie musi zapisywać uzasadnienia, które to liczby, ale z zapisu rozwiązania wynika, że liczba 30 nie może być dzielnikiem.) *lub* Uczeń stosuje poprawną metodę obliczania dzielnej, tzn. stosuje zapis wynikający z twierdzenia o dzieleniu z resztą $n = ab + r$, ale popełnia liczne błędy rachunkowe przy jej stosowaniu.
2	Uczeń rozważa tylko jedną resztę (spośród 30, 31, 32) i poprawnie oblicza wszystkie możliwe dzielne dla tej reszty i nie wykonuje dalszych obliczeń lub dalsza metoda jest błędna. *lub* Uczeń rozważa tylko jeden dzielnik (spośród 31, 32, 33) i poprawnie oblicza wszystkie możliwe dzielne dla tego dzielnika i nie wykonuje dalszych obliczeń lub dalsza metoda jest błędna.

3	Uczeń rozważa tylko dwie reszty (spośród 30, 31, 32) i poprawnie oblicza wszystkie możliwe dzielne dla tych reszt i nie wykonuje dalszych obliczeń lub dalsza metoda jest błędna. *lub* Uczeń rozważa tylko dwa dzielniki (spośród 31, 32, 33) i poprawnie oblicza wszystkie możliwe dzielne dla tych dzielników i nie wykonuje dalszych obliczeń lub dalsza metoda jest błędna.
4	Uczeń wyznacza szukana liczbę uwzględniając jeden z warunków: liczba 30 nie może być dzielnikiem lub liczba 33 nie może być resztą, ale nie sprawdza warunków zadania i wyznacza więcej niż jedną dzielną. *lub* Uczeń popełnia **jeden** błąd rachunkowy, w którymś momencie rozwiązywania zadania i konsekwentnie do popełnionego błędu poprawną metodą wyznacza dzielną uwzględniając fakt, że ma to być liczba trzycyfrowa.
5	Uczeń prawidłowo wyznacza dzielną i uzasadnia, że istnieje tylko jedna liczba spełniająca warunki zadania.

Uwaga
Uczeń nie musi wyliczać wszystkich dzielnych, gdy w inny sposób uzasadni, że nie są one trzycyfrowe i nie spełniają warunków zadania.

Zadanie 2. (0 - 5)

Rozwiązując zadanie uczeń ma do pokonania dwie trudności:
1. Przedstawienie liczby 380 w postaci iloczynu dwóch kolejnych liczb całkowitych.
2. Zauważenie, że są dwie pary liczby spełniające warunki zadania.

Przykładowe rozwiązania	
Oznaczenie: x – mniejsza z dwóch liczb, których iloczyn jest równy 380 • Zapisanie równania opisującego warunki zadania. $x \cdot (x + 1) = 380$.	
Metoda I • Należy rozłożyć liczbę 380 na iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych. $380 = 2^2 \cdot 5 \cdot 19$, stad $380 = 19 \cdot 20$, czyli $x = 19$ lub $(-20) \cdot (-19) = 380$, czyli $x = -20$	**Metoda II** • Po przekształceniu równania otrzymujemy $x^2 + x = 380$. • Szukamy liczby, która spełnia równanie. Kwadrat tej liczby nie może być większy od liczby 400, więc $19^2 + 19 = 380$ lub $(-20)^2 + (-20) = 400 - 20 = 380$.
• Obliczenie wartości wyrażenia $x^2 - x$. $19^2 - 19 = 342$ lub $(-20)^2 - (-20) = 420$	
Odpowiedź: Szukane wartości różnicy to 342 lub 420.	

Punktacja

Punkty	Poziom zaawansowania rozwiązania
0	Uczeń wykonuje przypadkowe działania, które świadczą o tym, że nie zrozumiał treści zadania. *lub* Uczeń podaje odpowiedź bez wykonywania obliczeń.
1	Uczeń poprawnie zapisuje równanie opisujące warunki zadania, ale nie wykonuje dalszych obliczeń lub dalsza metoda rozwiązania zadania jest błędna.

2	Uczeń poprawnie wyznacza w dowolny sposób tylko jedną parę kolejnych liczb całkowitych, których iloczyn jest równy 380 i nie wykonuje dalszych obliczeń lub dalsza metoda rozwiązania zadania jest błędna.
3	Uczeń poprawnie wyznacza dwie pary kolejnych liczb całkowitych, których iloczyn jest równy 380 i nie wykonuje dalszych obliczeń lub dalsza metoda rozwiązania zadania jest błędna. *lub* Uczeń poprawnie wyznacza tylko jedną parę kolejnych liczb całkowitych i dla mniejszej \ z nich oblicza wartość szukanej różnicy.
4	Uczeń poprawnie wyznacza dwie pary kolejnych liczb całkowitych, których iloczyn jest równy 380, ale źle wyznacza jedną z liczb spełniających warunki zadania i poprawnie oblicza wartość tylko jednej różnicy.
5	Uczeń poprawnie wyznacza dwie możliwe wartości różnicy.

Zadanie 3. (0 - 5)

Rozwiązując zadanie uczeń ma do pokonania trzy trudności:

1. Zapisanie objętość soku w kartonie na trzy sposoby w zależności od tego, na jakiej ścianie leży karton.
2. Obliczenie, ile soku jest w kartonie.
3. Obliczenie, ile soku wypił Piotr.

Przykładowe rozwiązania
• Obliczenie wewnętrznej pojemności kartonu z sokiem: $V_{kartonu}$ = 1 litr=1000 cm^3 = 1000 ml.
Oznaczenia x, y, z – wymiary kartonu z sokiem $V_{kartonu} = x \cdot y \cdot z$ • Zgodnie z warunkami zadania objętość soku, która jest w kartonie, możemy opisać na trzy sposoby. 1. Jeżeli $h_1 = 3$, to $V_{soku} = 3 \cdot y \cdot z$. 2. Jeżeli $h_2 = 8$, to $V_{soku} = 8 \cdot x \cdot z$. 3. Jeżeli $h_3 = 9$, to $V_{soku} = 9 \cdot x \cdot y$. • Mnożąc objętości soku otrzymujemy: $(V_{soku})^3 = (3 \cdot y \cdot z) \cdot (8 \cdot x \cdot z) \cdot (9 \cdot x \cdot y)$, a po przekształceniach $(V_{soku})^3 = 216 \cdot (x \cdot y \cdot z)^2$ ml, $(V_{soku})^3 = 216 \cdot (V_{kartonu})^2$ ml, $(V_{soku})^3 = 216 \cdot (1000)^2$ ml, $(V_{soku})^3 = 6^3 \cdot (10^2)^3$ ml. • Obliczenie ilości soku, która została w kartonie. $(V_{soku})^3 = 6^3 \cdot (10^2)^3$ ml, stąd $V_{soku} = 6 \cdot 10^2$ ml = 600 ml. • Obliczenie, ile mililitrów soku wypił Piotr. 1000 ml – 600 ml = 400 ml
Odpowiedź: Piotr wypił 400 ml soku.

Punktacja

Punkty	Poziom zaawansowania rozwiązania
0	Uczeń wykonuje przypadkowe działania, które świadczą o tym, że nie zrozumiał treści zadania. *lub* Uczeń podaje odpowiedź bez wykonywania obliczeń.
1	Uczeń zgodnie z warunkami zadania opisuje objętość soku, która jest w kartonie, na trzy sposoby, ale nie wykonuje dalszych obliczeń lub dalsza metoda rozwiązania zadania jest błędna.
2	Uczeń na podstawie poprawnie zapisanych zależności układa poprawne równanie, które pozwoli mu obliczyć objętość soku w kartonie i nie wykonuje dalszych obliczeń lub dalsza metoda rozwiązania zadania jest błędna.
3	Uczeń przy wyznaczeniu objętości soku, który jest w kartonie popełnia błąd rachunkowy i nie

	wykonuje dalszych obliczeń lub dalsza metoda rozwiązania zadania jest błędna.
4	Uczeń prawidłowo oblicza objętość soku, który jest w kartonie, ale nie oblicza, ile soku wypił Piotr lub jego obliczenia są błędne. *lub* Uczeń popełnia błąd rachunkowy przy obliczaniu objętości soku, który jest w kartonie i konsekwentnie do popełnionego błędu oblicza objętość soku, który wypił Piotr.
5	Uczeń prawidłowo oblicza ilość wypitego soku przez Piotra.

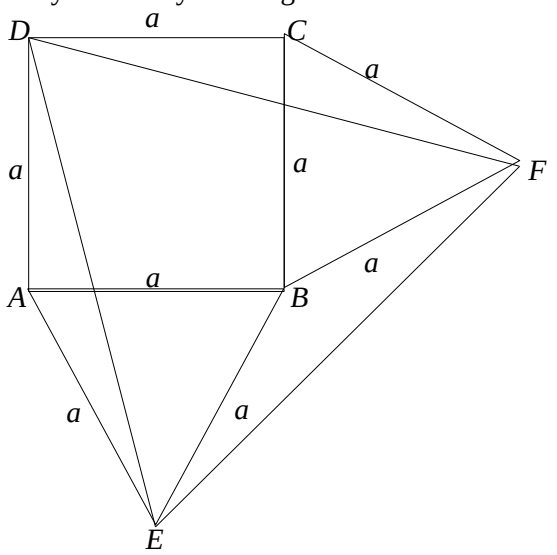
Zadanie 4. (0 - 5)

Rozwiązując zadanie uczeń ma do pokonania dwie trudności:

1. Wykonanie rysunku zgodnie z oznaczeniami i warunkami zadania.
2. Wykonanie prostych obliczeń z wykorzystaniem sumy kątów wewnętrznych trójkąta.
   lub
   Wykorzystanie cech przystawania trójkątów do rozwiązania zadania.

Przykładowe rozwiązanie

• Wykonanie rysunku zgodnie z warunkami zadania.



• Obliczenie miar kątów

Trójkąty *DFC, DEA i EBF* są równoramienne, więc

$|\angle FCD| = |\angle DCB| + |\angle BCF| = 90^0 + 60^0 = 150^0$,

$|\angle EAD| = |\angle EAB| + |\angle BAD| = 60^0 + 90^0 = 150^0$.

W trójkącie *EBF*

$|\angle EBF| = 360^0 - (60^0 + 90^0 + 60^0) = 150^0$.

Metoda I

1. Z cechy ***bkb*** przystawania trójkątów otrzymujemy, że $\Delta\ AED \equiv \Delta\ EBF \equiv \Delta\ CDF$.
2. Długości boków $|EF| = |FD| = |DE|$, czyli <u>trójkąt *DEF* jest równoboczny</u> .

Metoda II

Obliczanie miar kątów

1. $|\angle FDC| = |\angle ADE| = |\angle BFE| =$
   $= (180^0 - 150^0) : 2 = 15^0$, stąd
   $|\angle EDF| = 90^0 - 2 \cdot 15^0 = 60^0$.
2. $|\angle DFB| = 60^0 - 15^0 = 45^0$, zatem
   $|\angle EFD| = |\angle BFE| + |\angle DFB| =$
   $= 15^0 + 45^0 = 60^0$.

W trójkącie *DEF* zachodzi zależność

$|\angle EDF| = |\angle EFD| = 60^0$, zatem

$|\angle FED| = 180^0 - 2 \cdot 60^0 = 60^0$.

<u>Trójkąt *DEF*</u> ma wszystkie kąty równej miary, czyli <u>jest równoboczny</u>.

Punktacja

Punkty	Poziom zaawansowania rozwiązania
0	Uczeń wykonuje przypadkowe działania, które świadczą o tym, że nie zrozumiał treści zadania.
1	Uczeń wykonuje rysunek zgodnie z oznaczeniami i warunkami zadania, ale nie wykonuje dalszych obliczeń lub dalsza metoda rozwiązania zadania jest błędna.
2	Uczeń zauważa, że trójkąty *DFC, DEA* i *BFE* są równoramienne, ale nie oblicza miar ich kątów wewnętrznych i nie wykonuje dalszych obliczeń lub dalsza metoda rozwiązania zadania jest błędna.
3	Uczeń oblicza miary kątów wewnętrznych w trójkącie *DFC* lub w trójkącie *DEA*, ale nie wykonuje dalszych obliczeń lub dalsza metoda jest błędna. *lub* Uczeń oblicza miary kątów wewnętrznych w trójkącie *BFE*, ale nie wykonuje dalszych obliczeń lub dalsza metoda jest błędna.
4	Uczeń po obliczeniu miar kątów wewnętrznych w trójkącie *DFC* lub w trójkącie *DEA* oblicza $\lvert\angle EBF\rvert$, ale nie uzasadnia, że trójkąt *DEF* jest równoboczny. *lub* Uczeń po obliczeniu miar kątów wewnętrznych w trójkącie *BFE* oblicza $\lvert\angle FCD\rvert$ lub $\lvert\angle EAD\rvert$, ale nie uzasadnia, że miara wszystkich kątów w trójkącie *DEF* jest równa 60^0.
5	Uczeń uzasadnia, korzystając z cechy bkb, że trójkąty *DCF, DEA* i *EBF* są przystające oraz stwierdza, że $\lvert DF\rvert=\lvert EF\rvert=\lvert DE\rvert$, zatem trójkąt *DEF* jest równoboczny. *lub* Uczeń oblicza miary wszystkich kątów w trójkącie *DEF* (po 60º) i na tej podstawie stwierdza, że trójkąt *DEF* jest równoboczny.