

# Wojewódzki Konkurs Przedmiotowy z Matematyki

## - etap wojewódzki

### Przykładowe rozwiązania i propozycja punktacji rozwiązań

#### Ustalenia do punktowania zadań otwartych:

1. Jeśli uczeń przedstawił **obok prawidłowej metody błędną** i nie dokonał wyboru żadnej z nich (np. poprzez udzielenie odpowiedzi), to rozwiązanie traktujemy jako błędne.
2. Jeśli uczeń przedstawił **dwie poprawne metody** rozwiązania, z których jedna zawiera błędy rachunkowe i nie dokonał wyboru żadnej z nich (np. poprzez udzielenie odpowiedzi), to punktujemy metodę, która nie zawiera błędów rachunkowych.
3. Poprzez określenie „obliczył prawidłowo” rozumiemy, że uczeń zastosował prawidłową metodę i nie popełnił błędów rachunkowych.
4. W zadaniach **1 – 8** przyznajemy punkt za poprawną odpowiedź, bez względu na metodę, którą uczeń rozwiązał zadanie.

Wymagamy od ucznia zapisania rozwiązania oraz zapisania lub wskazania, np. przez podkreślenie, odpowiedzi.

Jeśli uczeń rozwiąże zadanie inną metodą, niż zaproponowana w *Propozycjach rozwiązań*, na przewodniczącym komisji spoczywa obowiązek rozstrzygnięcia jej prawidłowości i spójności.

## Odpowiedzi do zadań 1 – 8.

Przyznajemy po jednym punkcie za każdą poprawną odpowiedź.

Numer zadania	Odpowiedź
1	36
2	9
3	$-\frac{17}{18}$
4	20
5	- 9
6	4
7	10
8	100°

### **Zadanie 9 (8 punktów)**

Rozwiązując zadanie uczeń ma do pokonania następującą trudność:

- Rozstrzygnięcie przez którą z podanych liczb jest podzielna dana liczba.

#### **Rozwiązanie:**

Liczby podzielne przez:

- 9: 76221, 85608
- 12: 85608, 69900
- 15: 376230, 69900
- 18: 85608
- 25: 69900

#### **Punktacja:**

Przyznajemy po jednym punkcie za poprawne wskazanie każdej liczby podzielnej przez daną liczbę i odejmujemy po jednym punkcie za każde błędne wskazanie liczby podzielnej przez daną liczbę. Łączna liczba punktów za zadanie nie może być mniejsza od zera.

## Zadanie 10 (8 punktów)

Rozwiązując zadanie uczeń ma do pokonania dwie trudności :

- Ustalenie zależności pomiędzy cenami poszczególnych prezentów lub między kosztami zakupów pewnych grup prezentów.
- Obliczenie ceny każdego z prezentów.

**Przykładowe rozwiązanie:**

### **Propozycja 1**

Suma  $156 + 153 + 150 + 147 = 606$  jest trzykrotnością sumy cen wszystkich prezentów.

Suma cen wszystkich prezentów to 202.

$202 - 156 = 46$ ,  $202 - 153 = 49$ ,  $202 - 150 = 52$ ,  $202 - 147 = 55$ .

Zatem ceny kolejnych prezentów to 46zł, 49 zł, 52 zł i 55 zł.

### **Propozycja 2**

Z treści zadania wynika, że każdy kolejny prezent jest o 3 zł droższy od poprzedniego.

Założmy, że

$x$  – cena pierwszego prezentu, wówczas:

$x + 3$  – cena drugiego prezentu,

$x + 6$  – cena trzeciego prezentu,

$x + 9$  – cena czwartego prezentu.

Skoro cena trzech prezentów, bez czwartego to 147zł,

to mamy równanie  $x + x + 3 + x + 6 = 147$ .

Stąd  $3x = 138$ , więc  $x = 46$ ,  $x + 3 = 49$ ,  $x + 6 = 52$ ,  $x + 9 = 55$ .

Zatem najtańszy prezent kosztuje 46 zł, a ceny kolejnych to 49 zł, 52 zł i 55 zł.

### **Propozycja 3**

Z treści zadania wynika, że każdy kolejny prezent jest o 3 zł droższy od poprzedniego.

Założmy, że

$a$  – cena pierwszego prezentu,

$b$  – cena drugiego prezentu,

$c$  – cena trzeciego prezentu,

$d$  – cena czwartego prezentu, więc

$a = d - 9$ ,

$b = d - 6$ ,

$c = d - 3$ .

Cena trzech prezentów, bez pierwszego to 156 zł, zatem

$b + c + d = d - 6 + d - 3 + d = 156$  zł, stąd

$3d = 156 + 9$

$3d = 165$

$d = 55$ , a więc  $a = 46$ ,  $b = 49$ ,  $c = 52$ .

Zatem najtańszy prezent kosztuje 46 zł, a ceny kolejnych to 49 zł, 52 zł i 55 zł.

## Propozycja 4

Założmy, że

$a$  – cena pierwszego prezentu,

$b$  – cena drugiego prezentu,

$c$  – cena trzeciego prezentu,

$d$  – cena czwartego prezentu, więc

$a + b + c = 147$  zł,  $a + b + d = 150$  zł,  $a + c + d = 153$  zł,  $b + c + d = 156$  zł.

Dodając stronami wszystkie równania otrzymujemy równanie:

$3 \cdot a + 3 \cdot b + 3 \cdot c + 3 \cdot d = 606$  zł.

Zatem trzykrotność sumy cen wszystkich prezentów wynosi 606 zł.

Suma cen wszystkich prezentów to 202.

$202 - 156 = 46$ ,  $202 - 153 = 49$ ,  $202 - 150 = 52$ ,  $202 - 147 = 55$ .

Zatem ceny kolejnych prezentów to 46 zł, 49 zł, 52 zł i 55 zł.

**Podanie odpowiedzi: Ceny prezentów wynoszą odpowiednio: 46 zł, 49 zł, 52 zł i 55 zł.**

### Punktacja:

**Uwaga: Liczbę przyznanych punktów mnożymy przez dwa.**

pkt	Poziom zaawansowania rozwiązania
0	Uczeń wykonuje przypadkowe działania, które świadczą o tym, że nie zrozumiał zadania. lub Rozwiązuje zadanie popełniając liczne błędy rachunkowe.
1	Uczeń poprawnie zauważa, że suma podanych kwot jest trzykrotnością sumy cen wszystkich prezentów i obliczy tę trzykrotność (propozycja 1). lub Uczeń poprawnie zauważa, że każdy kolejny prezent jest o 3 zł droższy od poprzedniego. lub Uczeń układa cztery równania używając czterech niewiadomych (propozycja 4). lub Uczeń poprawnie podaje cenę każdego z prezentów nie uzasadniając odpowiedzi.
2	Uczeń poprawnie obliczy sumę cen wszystkich prezentów (propozycja 1). lub Uczeń za pomocą równania z jedną niewiadomą zapisuje sumę cen trzech prezentów (propozycja 2,3). lub Uczeń zapisze równanie $3a + 3b + 3c + 3d = 606$ (propozycja 4).
3	Uczeń poprawnie obliczy cenę jednego z prezentów. lub Uczeń rozwiązując równanie popełnia błąd rachunkowy i konsekwentnie do popełnionego błędu wyznacza ceny wszystkich prezentów.
4	Uczeń poprawnie obliczy cenę każdego z prezentów.

## Zadanie 11 (8 punktów)

Rozwiązując zadanie uczeń ma do pokonania trzy trudności :

- Obliczenie długości krawędzi podstawy prostopadłościanu.
- Obliczenie pojemności akwarium.
- Obliczenie pola powierzchni wewnętrznych ścianek akwarium, które po dolaniu wody wystają ponad jej powierzchnię.

**Rozwiązanie:**

Niech  $a$  oznacza długość kwadratu stanowiącego dno akwarium

Objętość wody dolanej przez Mateusza to  $12,5 \text{ l.} = 12,5 \text{ dm}^3 = 12500 \text{ cm}^3$ .

- a) Dolana woda przyjmuje kształt prostopadłościanu o podstawie kwadratu o boku długości  $a$  i wysokości 5 cm. Zatem

$$12500 \text{ cm}^3 = a^2 \cdot 5 \text{ cm.}$$

Stąd  $a^2 = 2500 \text{ cm}^2$ , czyli  $a = 50 \text{ cm}$ .

Obwód figury stanowiącej dno akwarium wynosi  $4 \cdot a = 200 \text{ cm}$ .

- b) Wiemy, że głębokość akwarium to  $30 \text{ cm} = 3 \text{ dm}$  oraz  $a = 50 \text{ cm} = 5 \text{ dm}$ .

Pojemność akwarium obliczamy następująco

$$a^2 \cdot 3 \text{ dm} = 25 \text{ dm}^2 \cdot 3 \text{ dm} = 75 \text{ dm}^3 = 75 \text{ l.}$$

lub

Dolana woda przyjmuje kształt prostopadłościanu o wysokości 5 cm.

Takich porcji wody w całym akwarium zmieści się  $30 \text{ cm} : 5 \text{ cm} = 6$ .

Każda z nich ma objętość 12,5 l.

Zatem pojemność akwarium jest równa  $6 \cdot 12,5 \text{ l} = 75 \text{ l}$ .

- c) Objętość wody po dolaniu przez Mateusza wynosi łącznie  $20 \text{ l} + 12,5 \text{ l} = 32,5 \text{ l}$ , zaś woda w akwarium sięga wysokości  $32,5 \text{ dm}^3 : 25 \text{ dm}^2 = 1,3 \text{ dm}$ .

Ponieważ głębokość akwarium wynosi 3 dm, to pole powierzchni, które mamy policzyć, będzie polem powierzchni bocznej prostopadłościanu o podstawie kwadratu (o boku 5 cm) i wysokości  $3 \text{ dm} - 1,3 \text{ dm} = 1,7 \text{ dm}$ .

Pole to jest równe:

$$4 \cdot 5 \text{ dm} \cdot 1,7 \text{ dm} = 34 \text{ dm}^2.$$

lub

Uczeń może obliczyć jak wysoko sięgała początkowo woda w akwarium

$20 \text{ dm}^3 : 25 \text{ dm}^2 = 0,8 \text{ dm}$ , a następnie, po dolaniu wody przez Mateusza, osiągnęła poziom  $0,8 \text{ dm} + 0,5 \text{ dm} = 1,3 \text{ dm}$ . Dalej obliczamy jak poprzednio.

Lub

Uczeń policzy pojemność niewypełnionej wodą (po dolaniu wody) części akwarium

$75 \text{ l} - 32,5 \text{ l} = 42,5 \text{ l}$ , a następnie poda wymiary tych części wewnętrznych ścianek

akwarium, które po dolaniu wody wystają ponad wodę. Są to cztery prostokąty o

wymiarach  $5 \text{ dm}$  na  $42,5 \text{ dm}^3 : 25 \text{ dm}^2 = 1,7 \text{ dm}$ .

**Podanie odpowiedzi: Obwód podstawy wynosi 200 cm, akwarium ma objętość 75 l, a łączne pole powierzchni tych części wewnętrznych ścianek akwarium, które po dolaniu wody wystają ponad wodę wynosi  $34 \text{ dm}^2$  ( $3400 \text{ cm}^2$ ).**

## Punktacja do poszczególnych podpunktów:

- a) Uczeń otrzymuje po jednym punkcie za każdą z poniższych czynności:
- poprawne wprowadzenie oznaczeń i zapisanie zależności pozwalającej obliczyć długość boku kwadratu stanowiącego dno akwarium,
  - obliczenie poprawną metodą długości boku kwadratu stanowiącego dno akwarium,
  - obliczenie poprawną metodą obwodu figury stanowiącej dno akwarium.

### Uwagi:

- *Jeśli uczeń inną, poprawną metodą, poprawnie obliczy obwód figury stanowiącej dno akwarium, otrzymuje 3 punkty.*
  - *Jeśli uczeń poprawną metodą wyznaczy długość boku kwadratu stanowiącego dno akwarium, lecz popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy obwód figury stanowiącej dno akwarium, to otrzymuje 2 pkt.*
- b) Uczeń otrzymuje po jednym punkcie za każdą z poniższych czynności:
- poprawne obliczenie pojemności akwarium,
  - poprawna zamiana jednostki i podanie odpowiedzi w litrach.

### Uwagi:

- *Jeśli uczeń popełni błąd przy zamianie jednostek i konsekwentnie do popełnionego błędu, poprawną metodą obliczy pojemność akwarium, to otrzymuje 1pkt.*
  - *Jeśli uczeń popełnił błąd przy wyznaczaniu długości boku kwadratu stanowiącego dno akwarium i konsekwentnie do popełnionego błędu oblicza pojemność akwarium, to otrzymuje 2 pkt.*
- c) Uczeń otrzymuje po jednym punkcie za każdą z poniższych czynności:
- poprawnie obliczy objętość nie wypełnionej wodą części akwarium lub poprawnie obliczy jak wysoko sięgała początkowo woda w akwarium,
  - poprawnie obliczy wysokość nie wypełnionej wodą części akwarium,
  - poprawnie obliczy pole powierzchni tych części wewnętrznych ścianek akwarium, które po dolaniu wody wystają ponad wodę.

### Uwagi:

- *Jeśli uczeń obliczy poprawną metodą pole powierzchni wewnętrznych ścianek akwarium, które po dolaniu wody wystają ponad wodę lecz w obliczeniach popełni błąd rachunkowy otrzymuje 2 pkt.*
- *Jeśli uczeń popełnił błąd przy wyznaczaniu długości boku kwadratu stanowiącego dno akwarium i konsekwentnie do popełnionego błędu oblicza pole powierzchni tych części wewnętrznych ścianek akwarium, które po dolaniu wody wystają ponad wodę otrzymuje 3 pkt.*

## Zadanie 12 (8 punktów)

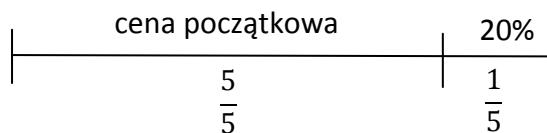
Rozwiązując zadanie uczeń ma do pokonania trzy trudności :

- Obliczenie początkowej ceny nart.
- Obliczenie ceny nart po obniżce.
- Obliczenie jaki procent początkowej ceny stanowi końcowa cena nart.

**Rozwiązanie:**

### **Propozycja 1**

Cena po podwyżce – 960 zł.



$960 \text{ zł} : 6 = 160 \text{ zł}$  – kwota podwyżki,

$160 \text{ zł} \cdot 5 = 800 \text{ zł}$  – cena początkowa.

$\frac{1}{4} \cdot 960 \text{ zł} = 240 \text{ zł}$  – kwota obniżki,

Obliczenie ceny nart po obniżce:  $960 \text{ zł} - 240 \text{ zł} = 720 \text{ zł}$ .

Obliczenie jaki procent początkowej ceny stanowi końcowa cena nart:

Cena początkowa: 800 zł to 100%, więc

80 zł to 10%,

Cena końcowa: 720 zł to 90%.

### **Propozycja 2**

960 zł to 120%, więc

8 zł to 1%, zatem

800 zł to 100%, stąd

Początkowa cena nart: 800 zł.

Obliczenie ceny nart po obniżce:  $\frac{3}{4} \cdot 960 \text{ zł} = 720 \text{ zł}$ .

Obliczenie jaki procent początkowej ceny stanowi końcowa cena nart:

$$\frac{\text{cena końcowa}}{\text{cena początkowa}} \cdot 100\% = \frac{720}{800} \cdot 100\% = \frac{9}{10} \cdot 100\% = 90\% .$$

**Podanie odpowiedzi: Początkowa cena nart wynosiła 800 zł, a po obniżce cena nart wynosiła 720 zł. Końcowa cena nart stanowiła 90% ceny początkowej.**

## **Punktacja:**

### **1 etap - Obliczenie początkowej ceny nart - 3 punkty.**

Uczeń otrzymuje po jednym punkcie za każdą z poniższych czynności:

- poprawne wprowadzenie oznaczeń i zapisanie zależności pozwalającej obliczyć kwotę podwyżki,
- obliczenie poprawną metodą kwoty podwyżki,
- obliczenie poprawną metodą ceny nart po podwyżce.

#### **Uwagi:**

- *Jeśli uczeń inną, poprawną metodą obliczy początkową cenę nart otrzymuje 3 pkt,*
- *Jeśli uczeń poprawną metodą obliczy początkową cenę nart, lecz popełni błąd rachunkowy, to otrzymuje 2 pkt.*

### **2 etap - Obliczenie ceny nart po obniżce - 3 punkty.**

Uczeń otrzymuje po jednym punkcie za każdą z poniższych czynności:

- poprawne wprowadzenie oznaczeń i zapisanie zależności pozwalającej obliczyć kwotę obniżki,
- obliczenie poprawną metodą kwoty obniżki,
- obliczenie poprawną metodą ceny nart po obniżce.

#### **Uwagi:**

- *Jeśli uczeń inną, poprawną metodą obliczy cenę nart po obniżce otrzymuje 3 pkt,*
- *Jeśli uczeń poprawną metodą obliczy cenę nart po obniżce, lecz popełni błąd rachunkowy, to otrzymuje 2 pkt.*

### **3 etap – Obliczenie jaki procent początkowej ceny stanowi końcowa cena nart – 2 punkty.**

Uczeń otrzymuje po jednym punkcie za każdą z poniższych czynności:

- stosowanie poprawnej metody w celu obliczenia jaki procent początkowej ceny stanowi końcowa cena nart,
- poprawne obliczenie jaki procent początkowej ceny stanowi końcowa cena nart.

#### **Uwagi:**

- *Jeśli uczeń popełnił wcześniej błąd, lecz poprawną metodą oblicza jaki procent początkowej ceny stanowi końcowa cena nart, konsekwentnie do popełnionego wcześniej błędu, otrzymuje za tę czynność 2 pkt.*



**Wojewódzki Konkurs Przedmiotowy z Matematyki dla uczniów szkół podstawowych - etap szkolny -kartoteka testu 2016/2017**

Numer zadania	Sprawdzana czynność	Punkt podstawy programowej	
		wymagania ogólne	wymagania szczegółowe
1	<p><b>Działania na liczbach naturalnych:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• dodawanie i odejmowanie w pamięci liczb naturalnych dwucyfrowych;</li> </ul> <p><b>Zadania tekstowe:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• stosowanie wiedzy z zakresu arytmetyki i geometrii oraz umiejętności i metod rachunkowych do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym.</li> </ul>	II	2.1 14.5
2	<p><b>Wielokąty, koła, okręgi:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• znajomość własności wielokątów.</li> </ul>	II	9.5
3	<p><b>Ułamki zwykłe i dziesiętne:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• porównywanie liczb.</li> </ul>	I	4.12
4	<p><b>Działania na liczbach naturalnych:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• dodawanie i odejmowanie w pamięci liczb naturalnych dwucyfrowych;</li> </ul> <p><b>Zadania tekstowe:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• stosowanie wiedzy z zakresu arytmetyki i geometrii oraz umiejętności i metod rachunkowych do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym.</li> </ul>	II	2.1 14.5
5	<p><b>Działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• obliczanie kwadratów liczb.</li> </ul>	II	5.1
6	<p><b>Obliczenia w geometrii:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• obliczanie pola: kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trójkąta, trapezu przedstawionych na rysunku (w tym na własnym rysunku pomocniczym) oraz w sytuacjach praktycznych.</li> </ul>	II	11.2
7	<p><b>Ułamki zwykłe i dziesiętne:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• opisywanie części danej całości za pomocą ułamka;</li> </ul> <p><b>Zadania tekstowe:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• czytanie ze zrozumieniem prostego tekstu zawierającego informacje liczbowe;</li> <li>• wykonywanie wstępnych czynności ułatwiających rozwiązanie zadania, w tym rysunek pomocniczy lub wygodne dla niego zapisanie informacji i danych z treści zadania;</li> <li>• dostrzeganie zależności między podanymi informacjami.</li> </ul>	IV	4.1 14.1 14.2 14.3

8	<b>Obliczenia w geometrii:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• obliczanie miar kątów z zastosowaniem poznanych własności kątów i wielokątów.</li> </ul>	II	11.6
9	<b>Działania na liczbach naturalnych:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• rozpoznawanie liczb naturalnych podzielnych przez 2, 3, 5, 9, 10, 100;</li> </ul> <b>Poszerzenie podstawy programowej o zagadnienie:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• podzielność liczb naturalnych przez 4, 6, 12, 15, 18, 20, 25.</li> </ul>	II	2.7
10	<b>Działania na liczbach naturalnych:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• dodawanie i odejmowanie liczb naturalnych wielocyfrowych pisemnie;</li> </ul> <b>Zadania tekstowe:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• stosowanie wiedzy z zakresu arytmetyki i geometrii oraz umiejętności i metod rachunkowych do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym.</li> </ul>	III	2.2 14.5
11	<b>Obliczenia w geometrii:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• obliczanie obwodu wielokąta o danych długościach boków;</li> <li>• obliczanie objętości i pola powierzchni prostopadłościanu przy danych długościach krawędzi;</li> <li>• stosowanie jednostek objętości i pojemności: litr, mililitr, <math>\text{dm}^3</math>, <math>\text{m}^3</math>, <math>\text{cm}^3</math>, <math>\text{mm}^3</math>;</li> </ul> <b>Zadania tekstowe:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• stosowanie wiedzy z zakresu arytmetyki i geometrii oraz umiejętności i metod rachunkowych do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym.</li> </ul>	IV	11.1 11.4 11.5 14.5
12	<b>Obliczenia praktyczne:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• interpretowanie 100% danej wielkości jako całości, 50% – jako połowy, 25% – jako jednej czwartej, 10% – jako jednej dziesiątej, a 1% – jako setną część danej wielkości liczbowej;</li> <li>• w przypadkach osadzonych w kontekście praktycznym obliczanie procentu danej wielkości w stopniu trudności typu 50%, 10%, 20%;</li> </ul> <b>Działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• obliczanie ułamka danej liczby naturalnej;</li> </ul> <b>Poszerzenie podstawy programowej o zagadnienie:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• jakim procentem jednej liczby jest inna liczba;</li> <li>• obliczanie procentu z liczby wyrażonego liczbą całkowitą;</li> </ul> <b>Zadania tekstowe:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• podział rozwiązywanie zadania na etapy, stosowanie własnych, poprawnych, wygodnych dla ucznia strategii rozwiązania zadania;</li> <li>• stosowanie wiedzy z zakresu arytmetyki i geometrii oraz umiejętności i metod rachunkowych do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym.</li> </ul>	IV	12.1 12.2 5.5 14.4 14.5