Wojewódzki Konkurs Przedmiotowy z Matematyki – etap rejonowy

Przykładowe rozwiązania i propozycja punktacji rozwiązań

<u>*Ustalenia do punktowania zadań otwartych:*</u>
1. Jeśli uczeń przedstawił **obok prawidłowej metody błędną** i nie dokonał wyboru żadnej z nich (np. poprzez udzielenie odpowiedzi), to rozwiązanie traktujemy jako błędne.
2. Jeśli uczeń przedstawił **dwie poprawne metody** rozwiązania, z których jedna zawiera błędy rachunkowe i nie dokonał wyboru żadnej z nich (np. poprzez udzielenie odpowiedzi), to punktujemy drogę, która nie zawiera błędów rachunkowych.
3. Poprzez określenie „obliczył prawidłowo" rozumiemy, że uczeń zastosował prawidłową metodę i nie popełnił błędów rachunkowych.

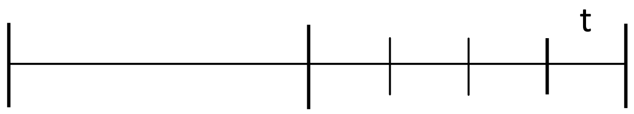
Wymagamy od ucznia zapisania rozwiązania oraz zapisania lub wskazania, np. przez podkreślenie, odpowiedzi.
Jeśli uczeń rozwiąże zadanie inną metodą, niż zaproponowana w *Propozycjach rozwiązania*, na przewodniczącym komisji spoczywa obowiązek rozstrzygnięcia jej prawidłowości i spójności.

Zadanie 1 (8 punktów)

Rozwiązując zadanie uczeń ma do pokonania trzy trudności :

- **Ustalenie zależności pomiędzy częściami meczu.**
- **Wyznaczenie części meczu w której grał Kajtek.**
- **Wyznaczenie czasu spędzonego przez Kajtka na boisku.**

Propozycja 1



t – czas pozostały do końca meczu po zejściu Kajtka z boiska,
$3 \cdot t$ – czas spędzony przez Kajtka na boisku,
$4 \cdot t$ – czas trwania drugiej połowy meczu,
$8 \cdot t$ – czas trwania meczu.
$\frac{3 \cdot t}{8 \cdot t} = \frac{3}{8}$ – część meczu w której grał Kajtek.
$\frac{3}{8} \cdot 80 = 30$ minut.

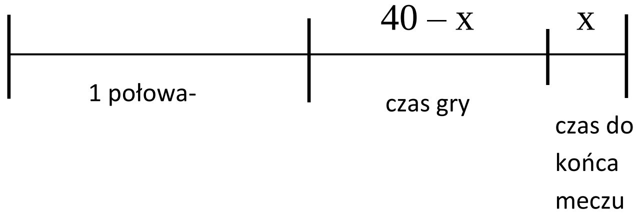
Propozycja 2

t – czas spędzony przez Kajtka na boisku,
$\frac{1}{3} \cdot t$ – czas pozostały do końca meczu po zejściu Kajtka z boiska,
$\frac{4}{3} \cdot t$ – czas trwania jednej połowy,
$\frac{8}{3} \cdot t$ – czas trwania całego meczu,

$\frac{t}{\frac{8}{3} \cdot t} = \frac{1}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{8}$ – część meczu w której grał Kajtek.

$\frac{3}{8} \cdot 80 = 30$ minut.

Propozycja 3



x – czas pozostały do końca meczu po zejściu Kajtka z boiska,
40 – x – czas spędzony przez Kajtka na boisku,
$3 \cdot x = 40 - x$
$3 \cdot x = 40 - x$
$4 \cdot x = 40$

x = 10 $3 \cdot x = 30$ Kajtek grał 30 minut, a cały mecz trwał 80 minut, więc $\frac{30}{80} = \frac{3}{8}$
Podanie odpowiedzi: Kajtek grał 30 minut, czyli przez $\frac{3}{8}$ meczu.

<u>Punktacja:</u>
Uwaga: Liczbę przyznanych punktów mnożymy przez dwa.

pkt	Poziom zaawansowania rozwiązania
0	Uczeń wykonuje przypadkowe działania, które świadczą o tym, że nie zrozumiał zadania. lub Rozwiązuje zadanie popełniając błędy rachunkowe.
1	Uczeń poprawnie w sposób graficzny przedstawia czas gry i czas do końca meczu zgodnie z warunkami zadania. lub Uczeń poprawnie, z użyciem jednej niewiadomej, oznacza czas spędzony przez Kajtka na boisku i czas do końca gry. lub Uczeń w jakikolwiek sposób wykaże, że rozumie iż Kajtek grał przez $\frac{1}{4}$ drugiej połowy.
2	Uczeń ustali jaką częścią całego meczu jest $\frac{1}{4}$ drugiej połowy. lub Uczeń poprawnie, za pomocą równania zapisze zależność pomiędzy czasem spędzonym przez Kajtka na boisku i czasem do końca gry (propozycja 3). lub Uczeń poprawną metodą oblicza ile minut grał Kajtek lub jaką część meczu stanowił czas gry lecz popełnia błąd rachunkowy.
3	Uczeń obliczy ile minut grał Kajtek. lub. Uczeń obliczy jaką część meczu grał Kajtek lub Uczeń poprawną metodą oblicza ile minut grał Kajtek i jaką część meczu stanowił czas gry lecz popełnia błąd rachunkowy.
4	Uczeń poprawnie oblicza ile minut grał Kajtek i jaką część meczu stanowił czas gry.

Zadanie 2 (8 punktów)

Rozwiązując zadanie uczeń ma do pokonania trzy trudności :

- **Obliczenie pola całego, prostokątnego placu.**
- **Obliczenie pola placu zabaw.**
- **Obliczenie jaki procent jednego pola stanowi drugie.**

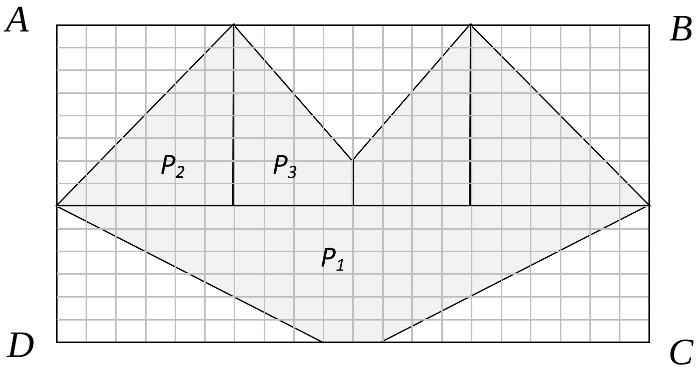
Przykładowe rozwiązanie:

I.

1. Obliczenie pola całego prostokątnego placu $P_1 = 20m \cdot 14m = 280m^2$.
2. Obliczenie pola pierwszego z „odciętych” narożników w kształcie trójkąta
   $P_2 = \frac{1}{2} \cdot 6m \cdot 8m = 24m^2$.
3. Obliczenie pola drugiego z „odciętych” narożników w kształcie trójkąta
   $P_3 = \frac{1}{2} \cdot 6m \cdot 9m = 27m^2$.
4. Obliczenie pola „odciętego” trójkąta równoramiennego $P_4 = \frac{1}{2} \cdot 6m \cdot 8m = 24m^2$.
5. Policzenie pola placu zabaw
   $P = P_1 - 2 \cdot P_2 - 2 \cdot P_3 - P_4 = 280m^2 - 48m^2 - 54m^2 - 24m^2 = 280m^2 - 126m^2 = 154m^2 = 1{,}54ara$.
6. Obliczenie jakim procent prostokątnego placu zajmuje plac zabaw
   $\frac{154}{280} \cdot 100\% = 0{,}55 \cdot 100\% = 55\%$

II.

1. Obliczenie pola całego prostokątnego placu $P_p = 20m \cdot 14m = 280m^2$.
2. Podzielenie figury stanowiącej plac zabaw na mniejsze.



3. Obliczenie pola trapezu $P_1 = \frac{(20+2) \cdot 6}{2} = 66m^2$.
4. Obliczenie pola trójkąta $P_2 = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24m^2$.
5. Obliczenie pola trapezu $P_3 = \frac{(8+2) \cdot 4}{2} = 20m^2$.
6. Policzenie pola placu zabaw $P = P_1 + 2 \cdot P_2 + 2 \cdot P_3 = 66m^2 + 2 \cdot 24m^2 + 2 \cdot 20m^2 = 66m^2 + 48m^2 + 40m^2 = 154m^2 = 1{,}54ara$.

Podanie odpowiedzi: Plac zabaw zajmuje powierzchnię $154m^2$, czyli 1,54ara. Plac zabaw stanowi 55% powierzchni całego placu.

pkt	Poziom zaawansowania rozwiązania
0	Uczeń wykonuje przypadkowe działania, które świadczą o tym, że nie zrozumiał zadania. lub Rozwiązuje zadanie popełniając liczne błędy rachunkowe.
1	Uczeń poprawnie oblicza pole prostokątnego placu. lub Uczeń poprawnie oblicza pole jednego z „odciętych” fragmentów w kształcie trójkąta. lub Uczeń dokonuje poprawnie podziału figury stanowiącej plac zabaw na figury, których pola potrafi policzyć.
2	Uczeń poprawnie obliczy pole prostokątnego placu i wyrazi tę wielkość w arach. lub Uczeń poprawnie oblicza pole prostokątnego placu oraz pole jednego z „odciętych” fragmentów w kształcie trójkąta. lub Uczeń poprawnie oblicza pole dwóch z „odciętych” fragmentów w kształcie trójkąta. lub Uczeń dokonuje poprawnie podziału figury stanowiącej plac zabaw na figury, których pola potrafi policzyć i oblicza pola jednej z nich.
3	Uczeń poprawnie oblicza pole trzech z „odciętych” fragmentów w kształcie trójkąta. lub Uczeń poprawnie oblicza pole prostokątnego placu oraz pole dwóch z „odciętych” fragmentów w kształcie trójkąta. lub Uczeń dokonuje poprawnie podziału figury stanowiącej plac zabaw na figury, których pola potrafi policzyć i oblicza pola dwóch z nich wszystkich tych figur.
4	Uczeń poprawnie oblicza pole prostokątnego placu oraz pole trzech z „odciętych” fragmentów w kształcie trójkąta. lub Uczeń dokonuje poprawnie podziału figury stanowiącej plac zabaw na figury, których pola potrafi policzyć i oblicza pola wszystkich tych figur. lub Uczeń poprawną metodą obliczy pole placu zabaw lecz popełnia jeden lub dwa błędy rachunkowe.
5	Uczeń poprawnie obliczy pole placu zabaw. lub Uczeń poprawną metodą oblicza pole placu zabaw, lecz popełnia jeden lub dwa błędy rachunkowe i wyrazi tę wielkość w arach konsekwentnie do popełnionych błędów.

6	Uczeń poprawnie oblicza pole placu zabaw i podaje tę wielkość w arach. lub Uczeń oblicza pole prostokątnego placu oraz pole placu zabaw, a także poprawnie oblicza jaki procent pola całego placu stanowi pole placu zabaw, lecz popełnia jeden lub dwa błędy rachunkowe. lub Uczeń oblicza pole prostokątnego placu oraz placu zabaw i wyraża to pole w arach, lecz popełnia jeden lub dwa błędy rachunkowe.
7	Uczeń oblicza pole prostokątnego placu oraz pole placu zabaw i wyraża to pole w arach, a także poprawną metodą oblicza jaki procent pola całego placu stanowi pole placu zabaw, lecz popełnia jeden lub dwa błędy rachunkowe. lub Uczeń oblicza pole prostokątnego placu oraz placu zabaw i wyraża je tylko w metrach kwadratowych, a także poprawnie oblicza jaki procent pola całego placu stanowi pole placu zabaw.
8	Uczeń poprawnie oblicza pole placu zabaw i wyraża to pole w arach, a także poprawnie oblicza jaki procent pola całego placu stanowi pole placu zabaw.

Uwaga: Jeśli uczeń przy liczeniu długości odcinka pomyli się o jedną kratkę uznajemy to każdorazowo za błąd rachunkowy. Jeśli popełni tę samą pomyłkę dla kilku odcinków o tej samej długości traktujemy to jako jeden błąd rachunkowy.

Zadanie 3 (8 punktów)

Rozwiązanie:

Propozycja 1

Ponieważ owce stanowią szóstą , krowy trzecią część stada, a kozy jego połowę, więc na jedną owce w stadzie zawsze przypadają dwie krowy i trzy kozy. Zbadajmy ile mleka będzie dawało stado złożone z jednej owcy, dwóch krów i trzech kóz, a następnie stada złożone z wielokrotności liczby tych zwierząt.

Owce(szósta część)		Krowy(jedna trzecia)		Kozy(połowa stada)		razem	
Liczba	Ilość mleka	Liczba	Ilość mleka	Liczba	Ilość mleka	Liczba	Ilość mleka
1	**1**	2	**140**	3	**120**	6	**261**
2	**2**	4	**280**	6	**240**	12	**522**
3	**3**	6	**420**	9	**360**	18	**783**
4	**4**	8	**560**	12	**480**	24	**1044**

Propozycja 2

Ponieważ owce stanowią szóstą część stada, więc liczba zwierząt w stadzie jest podzielna przez 6. Możemy więc utworzyć grupy składające się z 6 zwierząt. W każdej z nich połowa to kozy, jedna trzecia to krowy i szósta część to owce: Ko, Ko, Ko, Kr, Kr, Ow.

Taka grupa w ciągu tygodnia produkuje 40 + 40 + 40 + 70 + 70 + 1 = 261 litrów mleka. Skoro w gospodarstwie produkuje się tygodniowo 1044 litry mleka, zatem takich „6-elementowych” grup zwierząt jest 1044 : 261 = 4. Stąd w gospodarstwie jest $3 \cdot 4 = 12$ kóz, $2 \cdot 4 = 8$ krów i 4 owce.

Propozycja 3

x – liczba zwierząt w gospodarstwie,

$\frac{1}{2} \cdot x$ – liczba kóz w stadzie,

$\frac{1}{3} \cdot x$ – liczba krów w stadzie,

$\frac{1}{6} \cdot x$ – liczba owiec w stadzie,

$\frac{1}{2} \cdot x \cdot 40l$ – ilość mleka wyprodukowanego przez kozy w ciągu tygodnia,

$\frac{1}{3} \cdot x \cdot 70l$ – ilość mleka wyprodukowanego przez krowy w ciągu tygodnia,

$\frac{1}{6} \cdot x \cdot 1l$ – ilość mleka wyprodukowanego przez owce w ciągu tygodnia.

Zatem w ciągu tygodnia x zwierząt produkuje $\frac{1}{2} \cdot x \cdot 40 + \frac{1}{3} \cdot x \cdot 70 + \frac{1}{6} \cdot x \cdot 1$ litrów mleka.

Stąd

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot 40 + \frac{1}{3} \cdot x \cdot 70 + \frac{1}{6} \cdot x \cdot 1 = 1044$$

$$20 \cdot x + \frac{70}{3} \cdot x + \frac{1}{6} \cdot x = 1044$$

$$43\frac{1}{2} \cdot x = 1044$$

$$x = 24$$

W gospodarstwie jest więc 12 kóz, 8 krów i 4 owce.

Podanie odpowiedzi: W gospodarstwie jest 12 kóz, 8 krów i 4 owce.

pkt	Poziom zaawansowania rozwiązania
0	Uczeń wykonuje przypadkowe działania, które świadczą o tym, że nie zrozumiał zadania. lub Rozwiązuje zadanie popełniając liczne błędy rachunkowe.
1	Uczeń zauważa, że liczba krów jest dwa razy, a kóz trzy razy większa od liczby owiec (propozycja 1). lub Uczeń zauważa, że liczba zwierząt w stadzie jest podzielna przez 6 (propozycja2). lub Uczeń oznacza za pomocą jednej niewiadomej liczbę owiec, krów i kóz w stadzie (propozycja 3).
2	Uczeń zauważa, że możemy utworzyć grupy składające się z „6 zwierząt": owcy, dwóch krów i trzech kóz (propozycja 2). lub Uczeń oznacza ilość mleka wyprodukowanego w ciągu tygodnia przez wszystkie owce lub kozy lub krowy w stadzie (propozycja 3).
3	Uczeń oblicza ilość mleka produkowanego tygodniowo przez 1 owcę, 2 krowy i 3 kozy (propozycja 1). lub Uczeń oznacza ilość mleka wyprodukowanego w ciągu tygodnia przez dwa gatunki zwierząt w stadzie (propozycja 3).
4	Uczeń oblicza ilość mleka produkowanego łącznie w tygodniu przez stado składające się z 1 owcy, 2 krów i 3 kóz (propozycja 1 i 2). lub Uczeń oznacza ilość mleka wyprodukowanego w ciągu tygodnia przez zwierzęta każdego gatunku w stadzie (propozycja 3).
5	Uczeń oblicza ilość mleka produkowanego łącznie w tygodniu przez stado składające się z 2 owiec, 4 krów i 6 kóz (propozycja 1). lub Uczeń za pomocą równania zapisuje ilość mleka wyprodukowanego w ciągu tygodnia przez zwierzęta każdego gatunku w stadzie (propozycja 3).
6	Uczeń oblicza ilość mleka produkowanego łącznie w tygodniu przez stado składające się z 3 owiec, 6 krów i 9 kóz (propozycja 1). lub Uczeń oblicza ile jest w stadzie grup składających się z 1 owcy, 2 krów i 3 kóz (propozycja 2). lub Uczeń rozwiązuje równanie lecz popełnia błąd rachunkowy (propozycja 3).

7	Uczeń oblicza ilość mleka produkowanego łącznie w tygodniu przez stado składające się z 4 owiec, 8 krów i 12 kóz (propozycja 1). lub Uczeń oblicza ile jest w stadzie zwierząt każdego gatunku i popełnia jeden błąd. lub Uczeń rozwiązuje równanie (propozycja 3).
8	Uczeń poprawnie oblicza liczbę owiec, krów i kóz w stadzie.

Zadanie 4 ***(8 punktów)***

Rozwiązanie:

Propozycja 1
Ujednolicenie jednostek: 5cm x 30cm x 35cm. Pierwsza paczka: Długość wstążki opasującej paczkę wzdłuż: 35cm + 5cm + 35cm + 5cm = 80cm. Długość wstążki opasującej paczkę w poprzek: 30cm + 5cm + 30cm + 5cm = 70cm. Długość całej wstążki: 80cm + 70cm = 150cm. Długość wstążki potrzebnej na kokardkę: 20% ze 150cm, $\frac{20}{100} \cdot 150cm = \frac{1}{5} \cdot 150cm = 30cm$ Łączna długość wstążki 150cm + 30cm = 180cm. Druga paczka: Długość wstążki opasującej paczkę wzdłuż: 35cm + 5cm + 35cm + 5cm = 80cm. Długość wstążki opasującej paczkę w poprzek: 30cm + 5cm + 30cm + 5cm = 70cm. Długość wstążki opasującej paczkę pośrodku: 30cm + 35cm + 30cm + 35cm = 130cm. Długość całej wstążki $2 \cdot 80cm + 2 \cdot 70cm + 130cm = 160cm + 140cm + 130cm = 430cm$. Długość wstążki potrzebnej na kokardkę: 20% ze 430cm, $\frac{20}{100} \cdot 430cm = \frac{1}{5} \cdot 430cm = 86cm$. Łączna długość wstążki 430cm + 86cm = 516cm.

Propozycja 2
Ujednolicenie jednostek: 5cm x 30cm x 35cm. Pierwsza paczka: Suma długości wszystkich fragmentów wstążki wzdłuż paczki: 35cm · 2 = 70cm. Suma długości wszystkich fragmentów wstążki w poprzek paczki: 30cm · 2 = 60cm. Suma długości wszystkich pionowych fragmentów wstążki: 5cm · 4 = 20cm. Długość całej wstążki: 70cm + 60cm + 20cm = 150cm. Długość wstążki potrzebnej na kokardkę: 20% ze 150cm, $\frac{20}{100}$ · 150cm = $\frac{1}{5}$ · 150cm = 30cm. Łączna długość wstążki 150cm + 30cm = 180cm. Druga paczka: Suma długości wszystkich fragmentów wstążki wzdłuż paczki: 35cm · 6 = 210cm. Suma długości wszystkich fragmentów wstążki w poprzek paczki: 30cm · 6 = 180cm. Suma długości wszystkich pionowych fragmentów wstążki: 5cm · 8 = 40cm. Długość całej wstążki 210cm + 180cm + 40cm = 430cm. Długość wstążki potrzebnej na kokardkę: 20% ze 430cm, $\frac{20}{100}$ · 430cm = $\frac{1}{5}$ · 430cm = 86cm. Łączna długość wstążki 430cm + 86cm = 516cm.
Podanie odpowiedzi: Na zapakowanie pierwszej paczki zużyto180cm, a na zapakowanie drugiej 516cm wstążki.

Punktacja

Przyznajemy po jednym punkcie poprawne wykonanie każdej z następujących czynności:

- Poprawne ujednolicenie jednostek,
- Poprawny dobór metody przy obliczaniu wstążki potrzebnej do zapakowania pierwszej paczki,
- Poprawne obliczenie długości wstążki potrzebnej do obwiązania pierwszej paczki,
- Poprawne obliczenie długości wstążki potrzebnej na zrobienie kokardki przy pierwszej paczce,
- Poprawny dobór metody przy obliczaniu wstążki potrzebnej do zapakowania drugiej paczki,
- Poprawne obliczenie długości wstążki potrzebnej do obwiązania drugiej paczki,
- Poprawne obliczenie długości wstążki potrzebnej na zrobienie kokardki przy drugiej paczce,
- Podanie poprawnej odpowiedzi.

Uwaga: Jeśli uczeń złą metodą obliczy długość wstążki potrzebnej na zapakowanie prezentu i konsekwentnie do otrzymanego wyniku oblicza długość kokardki oraz sumuje te wielkości, nie otrzymuje punktów za metodę oraz obliczenie długości wstążki dla danej paczki.

Zadanie 5 (8 punktów)

Rozwiązując zadanie uczeń ma do pokonania dwie trudności :

- **Obliczenie kwoty o którą podniosła się średnia po zatrudnieniu nowego pracownika.**
- **Obliczenie pensji nowego pracownika.**

Rozwiązanie

Propozycja 1
Łączna pensja 56 pracowników: 2200zł $\cdot$ 56 = 123200zł. Kwota o która podniosła się średnia po zatrudnieniu nowego pracownika: $\frac{2}{100} \cdot 2200$zł = 44zł. Średnia pensja 57 pracowników: 2200zł + 44zł = 2244zł. Łączna pensja 57 pracowników: 2244zł $\cdot$ 57 = 127908zł. Pensja nowego pracownika: 127908zł – 123200zł = 4708zł.
Propozycja 2
Kwota o którą podniosła się średnia po zatrudnieniu nowego pracownika: $\frac{2}{100} \cdot 2200$zł = 44zł. Kwota o którą podniosła się łączna pensja wszystkich pracowników składa się z dwóch części: 2200zł oraz 44zł $\cdot$ 57 = 2508zł. Łącznie otrzymujemy kwotę 2200zł + 2508zł = 4708zł, która stanowi pensję nowego pracownika.
Podanie odpowiedzi: Pensja nowego pracownika wynosi 4708zł.

Punktacja:

Uwaga: Liczbę przyznanych punktów mnożymy przez dwa.

pkt	Poziom zaawansowania rozwiązania
0	Uczeń wykonuje przypadkowe działania, które świadczą o tym, że nie zrozumiał zadania. lub Rozwiązuje zadanie popełniając błędy rachunkowe.
1	Uczeń poprawnie oblicza łączną pensję 56 pracowników. lub Uczeń poprawnie oblicza kwotę o którą podniosła się średnia płaca po zatrudnieniu nowego pracownika. lub Uczeń poprawną metodą oblicza kwotę o którą podniosła się średnia płaca po zatrudnieniu nowego pracownika lecz popełnia błąd rachunkowy.

2	Uczeń poprawnie oblicza łączną pensję 56 pracowników i kwotę o którą podniosła się średnia płaca po zatrudnieniu nowego pracownika. lub Uczeń poprawnie oblicza kwotę o którą podniosła się średnia pensja dla 57 pracowników 44zł · 57 = 2508zł, bez kwoty 2200zł (propozycja 2). lub Uczeń poprawną metodą oblicza łączną pensję 57 pracowników lecz popełnia błąd rachunkowy.
3	Uczeń poprawnie oblicza łączną pensję 57 pracowników. lub Uczeń zauważa, że kwota o którą podniosła się łączna pensja wszystkich pracowników składa się z dwóch części: 2200zł oraz 2508zł (propozycja 2). lub Uczeń poprawną metodą oblicza pensję nowego pracownika lecz popełnia błąd rachunkowy.
4	Uczeń poprawnie oblicza pensję nowego pracownika.