Wojewódzki konkurs przedmiotowy z matematyki dla gimnazjum – etap szkolny, 24.10.2016 r.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

	A	B	C	D
Zadanie 1	**T** ■ **N** □	**T** □ **N** ■	**T** ■ **N** □	**T** □ **N** ■
Zadanie 2	**T** □ **N** ■	**T** ■ **N** □	**T** ■ **N** □	**T** □ **N** ■
Zadanie 3	**T** □ **N** ■	**T** □ **N** ■	**T** ■ **N** □	**T** □ **N** ■
Zadanie 4	**T** ■ **N** □	**T** ■ **N** □	**T** □ **N** ■	**T** ■ **N** □
Zadanie 5	**T** ■ **N** □	**T** □ **N** ■	**T** ■ **N** □	**T** ■ **N** □
Zadanie 6	**T** □ **N** ■	**T** ■ **N** □	**T** □ **N** ■	**T** □ **N** ■

Przykładowe rozwiązania i propozycja punktacji rozwiązań zadań otwartych

Ustalenia ogólne do punktowania zadań otwartych:

1. Jeśli uczeń przedstawił **obok prawidłowej metody błędną** i nie dokonał wyboru żadnej z nich (np. poprzez udzielenie odpowiedzi), to rozwiązanie traktujemy jako błędne.
2. Jeśli uczeń przedstawił **dwie poprawne metody** rozwiązania, z których jedna zawiera błędy rachunkowe i nie dokonał wyboru żadnej z nich (np. poprzez udzielenie odpowiedzi), to punktujemy drogę, która nie zawiera błędów rachunkowych.
3. Poprzez określenie **uczeń zastosował prawidłową metodę** rozumiemy, że zastosował poprawny wzór i użył w nim właściwych wielkości, odwołał się w sposób prawidłowy do odpowiedniego twierdzenia lub własności.
4. Poprzez określenie **„obliczył (przedstawił) prawidłowo”** rozumiemy, że uczeń zastosował prawidłową metodę i nie popełnił błędów rachunkowych.

Za rozwiązanie zadania 7 i 8 przyznajemy maksymalnie 4 punkty, a za rozwiązanie zadania 9 przyznajemy maksymalnie 8 punktów. Wymagamy od ucznia zapisania rozwiązania oraz zapisania lub wskazania, np. przez podkreślenie, odpowiedzi. Jeśli uczeń rozwiąże zadanie inną metodą, niż zaproponowana w *Propozycjach rozwiązania*, na przewodniczącym komisji spoczywa obowiązek rozstrzygnięcia jej prawidłowości i spójności oraz poprawnej oceny.

Zadanie 7. Rozwiązując zadanie uczeń powinien:

- **Wykazać się rozumieniem definicji środkowej w trójkącie.**
- **Odwołać się do odpowiednich własności o środkowych w trójkącie.**
- **Umiejętnie wykorzystać powyższe własności do udowodnienia równości pól.**

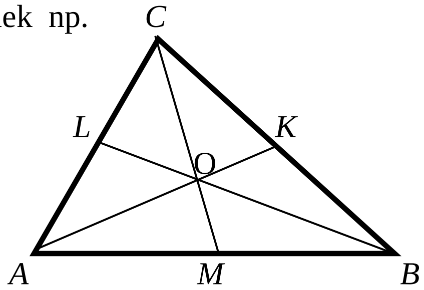
Przykładowe rozwiązanie

I metoda

Środkowa trójkąta dzieli go na 2 trójkąty o równych polach ponieważ mają podstawy równej długości i wspólną wysokość.

$$P_{\Delta AMC} = P_{\Delta MBC}$$

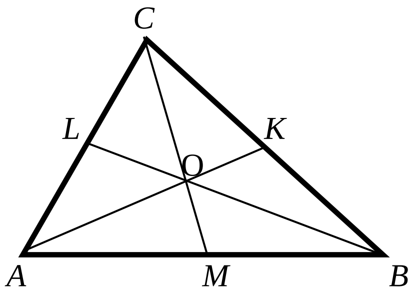
Rysunek np.



$$P_{\Delta AOM} = P_{\Delta MBO} = x$$
$$P_{\Delta BKO} = P_{\Delta OKC} = y$$
$$P_{\Delta AOL} = P_{\Delta LCO} = z$$
$$x + 2y = x + 2z \ \rightarrow y = z$$
$$2x + y = 2z + y \rightarrow x = z$$

Odpowiedź: Środkowe dzielą trójkąt na sześć trójkątów o jednakowych polach.

II metoda



Środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Środkowa CM dzieli bok AB na połowy. Powstałe w ten sposób 2 trójkąty AMC i MBC mają podstawy równej długości i wspólną wysokość więc mają równe pola.

W ten sam sposób środkowa OM dzieli w trójkącie ABO bok AB na połowy. Powstałe w ten sposób 2 trójkąty AMO i MBO mają podstawy równej długości i wspólną wysokość więc mają równe pola.
Analogiczne zależności występują dla środkowych AK i BL.
Zauważmy zatem, że skoro

$$P_{\Delta ABK} = \frac{1}{2}\ P_{\Delta ABC} \quad \text{i} \quad P_{\Delta ABL} = \frac{1}{2}\ P_{\Delta ABC}$$

więc $P_{\Delta AOL} = P_{\Delta BOK}$.

Analogicznie $P_{\Delta COK} = P_{\Delta AMO}$ i $P_{\Delta OMB} = P_{\Delta LOC}$.

Dowodzi to równości pól trójkątów: LOC, LOA, AMO, MOB, BOK i KOC.

Odpowiedź: Środkowe dzielą trójkąt na sześć trójkątów o jednakowych polach.

Punktacja

Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
Uczeń wykazuje się znajomością własności środkowych trójkąta; środkowe przecinają się w jednym puncie, środkowe połowią długości boków trójkąta. *Za pomocą poprawnego rysunku lub poprzez opis tych własności.*	**1**
Uczeń zauważa, że środkowa dzieli trójkąt na 2 trójkąty o równych polach. *Lub* Uczeń zaznacza na rysunku, że odpowiednie odcinki są równej długości i odpowiednie trójkąty mają wspólną wysokość.	**1**
Uczeń uzasadnia równości pól <u>przynajmniej</u> dwóch par małych trójkątów.	**1**
Z uzasadnienia ucznia wynika, że wszystkie (sześć trójkątów) otrzymane w zadaniu trójkąty mają równe pola.	**1**

Uwagi:

1. Jeżeli uczeń wykonuje rysunek szczególnego trójkąta, np. równobocznego, i korzysta z jego szczególnych własności do przeprowadzenia dowodu – przyznajemy 0pkt.
2. Jeżeli uczeń przeprowadza dowód na podstawie konkretnych długości boków – przyznajemy 0pkt.

<u>**Zadanie 8.**</u> **Rozwiązując zadanie uczeń ma do pokonania dwie trudności:**

- **Zapisanie zależności pomiędzy kwotą pieniędzy dziewczynek w postaci algebraicznej.**
- **Rozwiązanie prawidłowymi metodami zredagowanego równania lub układu równań.**

Propozycje rozwiązania

I metoda

Ilość pieniędzy Moniki x
Ilość pieniędzy Marysi y
Wydane pieniądze Moniki $\frac{2}{3}x$
Wydane pieniądze Marysi $0{,}6y$

$$\frac{2}{3}x = 2 \cdot 0{,}6y$$

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ \frac{2}{3}x = 2 \cdot 0{,}6y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 45 \\ y = 25 \end{cases}$$

Odpowiedź: Przed zakupem książek Monika miała 45 zł, a Marysia 25 zł.

II metoda

Ilość pieniędzy Moniki x
Ilość pieniędzy Marysi $70 - x$
Wydane pieniądze Moniki $\frac{2}{3}x$
Wydane pieniądze Marysi $0{,}6(70 - x)$

$$\frac{2}{3}x = 2 \cdot 0{,}6(70 - x)$$

$$x = 45$$

$$70 - 45 = 25$$

Odpowiedź: Przed zakupem książek Monika miała 45 zł, a Marysia 25 zł.

Punktacja

Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
Uczeń poprawnie zapisuje zależności wydanych pieniędzy między dziewczynkami.	**1**
Uczeń prawidłowo zapisał układ równań lub równanie.	**1**
Uczeń prawidłową metodą rozwiązał układ równań. *Lub* Uczeń prawidłową metodą rozwiązał równanie. *Punkt przyznajemy również w sytuacji, gdy uczeń popełni błąd rachunkowy.*	**1**
Uczeń bezbłędnie rozwiązuje układ równań lub równanie i udziela prawidłowej odpowiedzi.	**1**

Uwagi:

1. Jeżeli uczeń nie opisze danych, a poprawnie ułoży równanie lub układ równań i nie udzieli odpowiedzi otrzymuje max. 2pkt.
2. Rozwiązanie niealgebraiczne traktowane jest, jako podanie odpowiedzi do zadania bez wymaganego sposobu. Za rozwiązanie zadania sposobem niealgebraicznym uczeń może otrzymać max.1pkt.

<u>Zadanie 9.</u> Rozwiązując zadanie uczeń ma do pokonania trzy trudności:

- **Obliczenie pola i obwodu wskazanej części koła.**
- **Porównanie pól wskazanych części koła.**
- **Obliczenie stosunku wskazanych części koła.**

Przykładowe rozwiązanie

Średnica półkola $I = 12\ cm$

$r_1 = 6$ cm

$P_I = 36\pi$ cm^2 : 2 = 18π cm^2

Średnica półkola $II = 4\ cm$

$r_2 = 2$ cm

$P_{II} = 4\pi$ cm^2 : 2 = 2π cm^2

Pole $_{zakreskowane} = \frac{1}{2}P_{\ koła} - P_{II} + P_I = 48\pi$ cm^2

Pole $_{białe} = P_{\ koła} - P_{\ zakreskowane} = 16\pi$ cm^2

$Obw_{\ zakreskowany} = \frac{1}{2}\ Obw_{\ koła} + Obw_{\ półkola\ I} + Obw_{\ półkola\ II}$

8π cm+ 6 π cm+ 2 π cm= 16 π cm

$r_{koła} = 8$cm

$Obw_{\ koła} = 2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 8cm = 16\pi$ cm

$Obw_{\ koła} = Obw_{\ zakreskowany}$

$\frac{48\pi}{16\pi} = \frac{3}{1}$ lub $48\pi : 16\pi = 3$ lub $16\pi \cdot 3 = 48\pi$

Odpowiedź: **a)** Pole zakreskowanego obszaru wynosi 48π cm^2, a obwód 16π cm.
b) Obwód całego koła równy jest obwodowi zakreskowanego obszaru.
c) Stosunek pola zakreskowanego do pola białego wynosi 3:1.

Punktacja

Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
Uczeń stosuje poprawną metodę obliczenia pola połowy dużego koła lub fragmentu *I* lub *II* z zakreskowanej figury (we wzorze na obliczenie pola wykorzystuje właściwą długość promienia).	1
Uczeń stosuje poprawną metodę obliczenia pola zakreskowanej figury (we wzorze na obliczenie pola wykorzystuje właściwą długość promienia).	1
Uczeń stosuje poprawną metodę obliczenia pola białego figury (we wzorze na obliczenie pola wykorzystuje właściwą długość promienia).	1
Uczeń stosuje poprawną metodę obliczenia obwodu zakreskowanej figury (we wzorze na obliczenie pola wykorzystuje właściwą długość promienia). *Lub* Uczeń stosuje poprawna metodę obliczenia obwodu całego koła (we wzorze na obliczenie pola wykorzystuje właściwą długość promienia).	1
Uczeń prawidłowo porównuje obwód zakreskowanej figury z obwodem całego koła.	1
Uczeń układa prawidłowy stosunek pól obszaru zakreskowanego i białego.	1
Uczeń prawidłowo przedstawia stosunek pól obszaru zakreskowanego i białego w najprostszej postaci i udziela prawidłowej odpowiedzi do punktu c).	1
Uczeń wykonuje w całym zadaniu prawidłowe rachunki.	1

Uwagi:

1. Akceptujemy (poza wzorcową zapisaną w *propozycjach rozwiązania*) odpowiedź do podpunktu c):
   - Pole obszaru zakreskowanego jest trzy razy większe od pola obszaru białego.
   - Pole obszaru białego jest trzy razy mniejsze od pola obszaru zakreskowanego.
   - Stosunek pola obszaru zakreskowanego do pola obszaru białego wynosi 3.
2. Uczeń może zapisać pole obszaru białego bez szczegółowych obliczeń, o ile jego wartość wynika z wcześniejszych obliczeń pola *I*, *II* oraz połowy dużego koła.
3. W rozwiązaniu zadania nie oceniamy prawidłowości stosowania jednostek. Oceniamy dopiero czy uczeń użył prawidłowych jednostek, gdy formułował odpowiedź.
4. Pominięcie liczby $\boldsymbol{\pi}$ w metodzie obliczenia pola lub obwodu koła traktujemy jako błąd metody.
5. Pominięcie liczby $\boldsymbol{\pi}$ w dalszych obliczeniach (tzn. po poprawnym podstawieniu do wzoru właściwych wielkości) pola lub obwodu koła traktujemy jako błąd rachunkowy.
6. Przybliżenie liczby $\boldsymbol{\pi}$ do wartości innej niż 3,14 w obliczeniach traktujemy jako błąd rachunkowy.