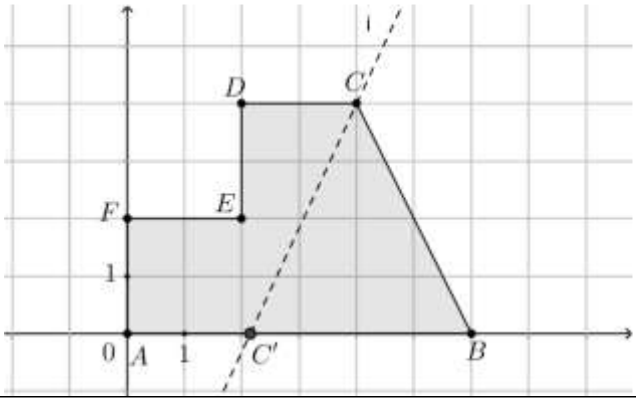
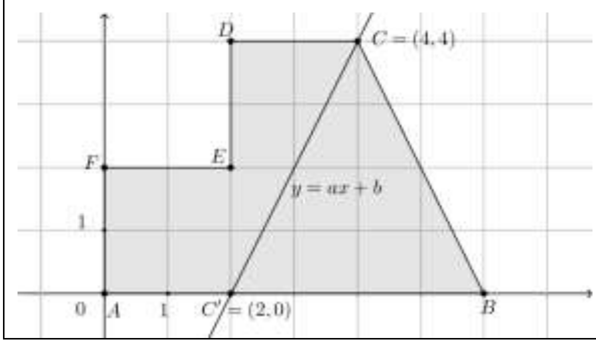
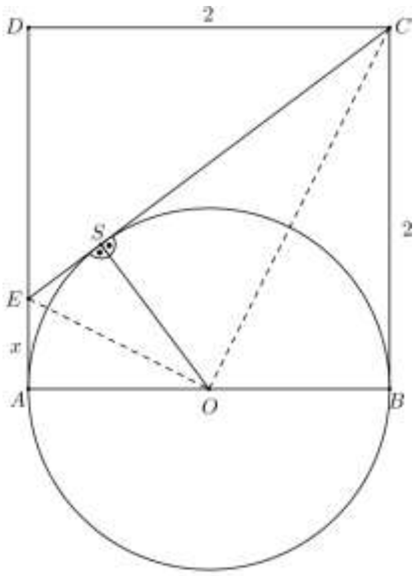
Uwaga. Jeżeli uczeń poprawnie rozwiązał zadanie metodą inną niż podana w schemacie rozwiązania otrzymuje maksymalną liczbę punktów za to zadanie.

Zadanie 1 (za 9 punktów)	Pkt	Punkty za:
Oznaczmy: d - liczba dziewczynek, c - liczba chłopców, x - liczba czekoladek przypadająca na 1 chłopca , y - liczba batoników przypadająca na 1 dziewczynkę , Możemy teraz zapisać, że: $x+1$ - liczba czekoladek przypadająca na 1 dziewczynkę , $y+1$ - liczba batoników przypadająca na 1 chłopca .		
▪ Każda dziewczynka dostała $x+1$ czekoladek i y batoników, razem $x+y+1$ sztuk słodyczy. ▪ Każdy chłopiec dostała x czekoladek i $y+1$ batoników, razem $x+y+1$ sztuk słodyczy.		
Dzieci jest $c+d$ i każde dostało $x+y+1$ sztuk słodyczy, więc Wergiliusz rozdał dzieciom $(c+d)(x+y+1)$ sztuk słodyczy, na które składają się: 47 czekoladek i 74 batoniki. Stąd otrzymujemy równanie, w którym niewiadomymi są liczby naturalne dodatnie: $$(c+d)(x+y+1)=47+74$$	1	Zauważenie związku między liczbą dzieci oraz liczbą sztuk słodyczy przypadających na jedno dziecko.
$$(c+d)(x+y+1)=121$$ $$(c+d)(x+y+1)=11^2$$	1	Zauważenie, że liczba dzieci oraz liczba sztuk słodyczy przypadających na jedno dziecko muszą być dzielnikami liczby 121.
Zatem liczby $c+d$ oraz $x+y+1$ są dzielnikami liczby 11^2 oraz $c+d \geq 2$ oraz $x+y+1 \geq 3$. Więc jest tylko jedna możliwość: $c+d=11$ (liczba dzieci) $x+y+1=11$ (liczba słodkości na 1 dziecko) Mamy więc odpowiedź na pytanie (a): Wergiliusz miał dzieci 11.	1	Wyznaczenie liczby wszystkich dzieci.
Czekoladek było 47 więc: $$d(x+1)+cx=47$$ $$dx+d+cx=47$$ $$(d+c)x+d=47$$ $$11x+d=47$$ Liczba d jest większa od 0 i mniejsza od 11 (bo $c+d=11$) , więc d musi być resztą z dzielenia liczby 47 przez 11.	1	Ułożenie równania wyrażającego zależność między liczbą dziewczynek, liczbą chłopców oraz liczbą czekoladek (lub batoników $dy+c(y+1)=74$).
Wynika stąd, że $d=3$ czyli wśród dzieci były 3 dziewczynki.	1	Wyznaczenie liczby dziewcząt lub liczby chłopców.
W takim razie $x=4$. czyli każdy chłopiec otrzymał 4 czekoladki.	1	Wyznaczenie ile czekoladek dostała każda z dziewczynek.
Wiemy już, że: $c+d=11$ i $d=3$, więc $c=8$.	1	Wyznaczenie liczby chłopców.

Wiemy także, że $x + y + 1 = 11$ i $x = 4$, więc $y = 6$.	1	Wyznaczenie ile batoników dostała każdy z chłopców.
Odpowiedź: (a) Ojciec Wergiliusz miała 11 dzieci. (b) Dziewcząt było 3, a chłopców 8. (c) Każdy z chłopców dostał 4 czekoladki, a każda dziewczynka dostała 6 batoników.	1	Bezbłędne wyniki.

Zadanie 2 (za 8 punktów)	Pkt	Punkty za:
Oznaczmy przez C' punkt w którym szukana przetnie oś x. Wtedy pole trójkąta $C'BC$ powinno się równać połowie pola sześciokąta $ABCDEF$, 	1	Zauważenie, że szukana prosta podzieli sześciokąt $ABCDEF$ na nowy sześciokąt i trójkąt.
Pole P sześciokąta ABCDEF można policzyć jako sumę pól kwadratu 2x2, prostokąta 2x4 oraz trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 2 i 4. $P = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4$ $P = 16$	1	Obliczenie pola sześciokąta $ABCDEF$.
Zatem pole trójkąta $C'BC$ powinno być równe 8.	1	Zauważenie, że pole trójkąta jako jednej z części powstałej podziału musi być równe 8.
Jeśli za podstawę trójkąta przyjmiemy odcinek $C'B$ to wysokość będzie równa drugiej współrzędnej punktu C czyli 4. Otrzymujemy więc równanie $\frac{1}{2} \cdot \lvert C'B \rvert \cdot 4 = 8$ I stąd $\lvert C'B \rvert = 4$	1	Zauważenie, że wysokość trójkąta poprowadzona z wierzchołka C jest równa 4 oraz poprawna metoda wyznaczenia długości podstawy trójkąta zawartej w osi x.
Skoro tak to punkt C' leży na osi x o 4 jednostki na lewo od punktu $B = (6,0)$, z czego wynika, że $C' = (2,0)$. 	1	Wyznaczanie współrzędnych drugiego punktu, przez który musi przechodzić wykres szukanej funkcji liniowej.

Szukana wykresem szukanej funkcji liniowej jest prostą przechodzącą przez punkty $C = (4,4)$ oraz $C = (2,0)$. Funkcję liniową można zapisać wzorem postaci $y = ax + b$. Punkt $C = (4,4)$ należy do tej prostej, więc $4 = a \cdot 4 + b$. Punkt $C' = (2,0)$ należy do tej prostej, więc $0 = a \cdot 2 + b$.	1	Poprawna metoda wyznaczania równania funkcji liniowej.
Współczynniki a i b możemy więc wyznaczyć z układu równań: $\begin{cases} 4a + b = 4 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4a + b = 4 \\ b = -2a \end{cases}$ $\begin{cases} 4a - 2a = 4 \\ b = -2a \end{cases}$ $\begin{cases} 2a = 4 \\ b = -2a \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}$	1	Poprawne metoda wyznaczania współczynników funkcji liniowej.
Odpowiedź. Szukana funkcja liniowa jest zatem zadane wzorem $y = 2x - 4$.	1	Bezbłędne wyznaczenie wzoru funkcji liniowej.

Zadanie 3 (za 6 punktów)	Pkt	Punkty za:
Przyjmijmy oznaczenia: O - środek okręgu k, S – punt styczności odcinka CE z okręgiem k, r- długość promienia okręgu k, x – długość odcinka AE. Ponieważ odcinki OA, OB oraz OS są promieniami okręgu więc wszystkie te odcinki mają długość r. Długość boku kwadratu jest równa 2 więc: $2r = 2$ $r = 1$  	1	Zaznaczenie na rysunku środka okręgu, punktu styczności oraz wyznaczenie długości promienia okręgu.
Promień poprowadzony do punktu styczności S jest prostopadły do odcinka stycznego oraz czworokąt $ABCD$ jest kwadratem, więc trójkąty OSE oraz OAE są prostokątne i z twierdzenia Pitagorasa wynika, że: $\lvert ES\rvert = \sqrt{\lvert OE\rvert^2 - \lvert OS\rvert^2}$ $\lvert ES\rvert = \sqrt{\lvert OE\rvert^2 - r^2}$ $\lvert ES\rvert = \sqrt{\lvert OE\rvert^2 - \lvert OA\rvert^2}$ $\lvert ES\rvert = \lvert EA\rvert$ $\lvert ES\rvert = x$	1	Zauważenie, że odcinki EA i ES są tej samej długości
Trójkąty OBC oraz OSC są prostokątne i z twierdzenia Pitagorasa wynika, że: $\lvert CS\rvert = \sqrt{\lvert OC\rvert^2 - \lvert OS\rvert^2}$ $\lvert CS\rvert = \sqrt{\lvert OC\rvert^2 - r^2}$ $\lvert CS\rvert = \sqrt{\lvert OC\rvert^2 - \lvert OB\rvert^2}$ $\lvert CS\rvert = \lvert CB\rvert$ $\lvert CS\rvert = 2$	1	Zauważenie, że długość odcinka CS jest równa 2.

<table>
<tr>
<td>
Z przyjętych oznaczeń i powyższych obliczeń wynika, że:

- $|DE| = 2 - x$
- $|EC| = 2 + x$

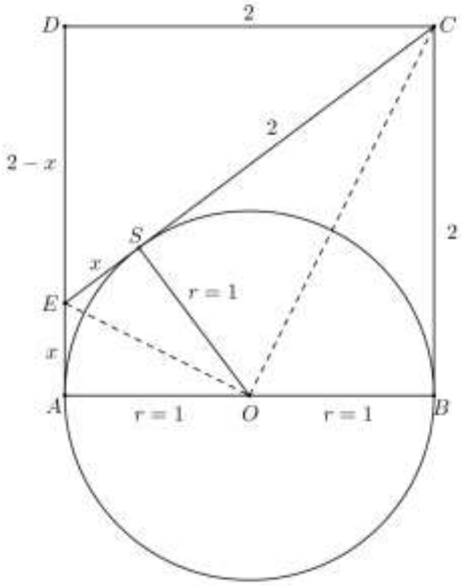
Wobec tego z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego CDE mamy:

$$(2 + x)^2 = (2 - x)^2 + 2^2$$

$$4 + 4x + x^2 = 4 - 4x + x^2 + 4$$

$$8x = 4$$

$$x = 0{,}5$$

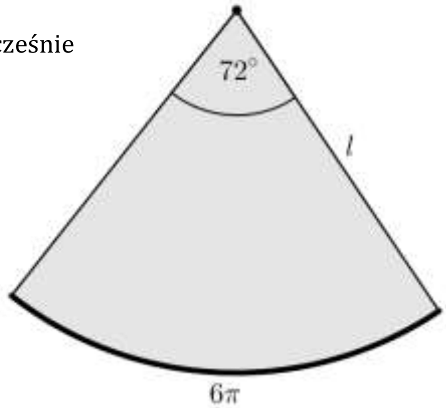
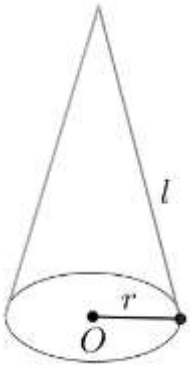
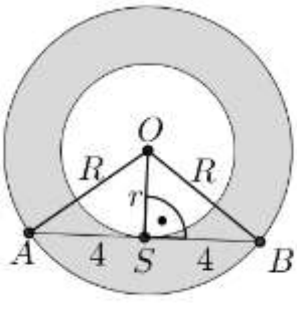


</td>
<td>1</td>
<td>Poprawna metoda wyznaczenia długości odcinka AE lub ES.</td>
</tr>
<tr>
<td>
Możemy teraz wyznaczyć długość odcinka CE:

$$|CE| = 2 + x$$

$$|CE| = 2 + 0{,}5$$

$$|CE| = 2{,}5$$
</td>
<td>1</td>
<td>Poprawna metoda wyznaczenia długości odcinka CE.</td>
</tr>
<tr>
<td>Odpowiedź: Odcinek CE ma długość 2,5.</td>
<td>1</td>
<td>Zadanie rozwiązane bez błędów rachunkowych.</td>
</tr>
</table>

Zadanie 4 (za 7 punktów)	**Pkt**	**Punkty za:**
Niech l oznacza promień wycinka koła jednocześnie długość tworzącej stożka. Wiemy, że długość łuku opartego na kącie środkowym 72° jest równe 6π, więc $\frac{72}{360} \cdot 2\pi l = 6\pi$ $\frac{1}{5} \cdot 2\pi l = 6\pi$ $l = 15$ 	1	Poprawna metoda wyznaczenia długości tworzącej stożka.
Niech r oznacza promień podstawy stożka i jednocześnie promień mniejszego okręgu ograniczającego pierścień. Wtedy $2\pi r = 6\pi$ $r = 3$ 	1	Poprawna metoda wyznaczania promienia podstawy stożka.
Pole P_1 powierzchni bocznej stożka wyraża się wzorem $P_1 = \pi r l$. Podstawmy obliczone wartości za r i l: $P_1 = \pi \cdot 3 \cdot 15$ $P_1 = 45\pi$	1	Poprawna metoda wyznaczania pola powierzchni bocznej stożka.
Niech R oznacz promień większego okręgu ograniczającego pierścień. Oznaczmy końce odcinka stycznego przez A i B oraz punkt styczności przez S. Punkt S dzieli odcinek AB długości 8 na połowy, więc odcinki SA i SB sa długości 4. Promień mniejszego okręgu poprowadzony do punktu styczności S odcinka jest prostopadły do odcinka stycznego AB. 	1	Zauważenie związku między promieniami okręgów ograniczających pierścień a długością odcinka stycznego.

Pole pierścienia (ronda) jest równe różnicy pól kół o promieniach R i r: $$P_2 = \pi R^2 - \pi r^2$$ $$P_2 = \pi(R^2 - r^2)$$ Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta OSB wynika, że: $$R^2 - r^2 = 4^2$$ Zatem $$P_2 = 16\pi$$	1	Poprawna metoda wyznaczania pola pierścienia.
Pole P ronda ze stożkiem jest równe: $$P = P_1 + P_2$$ $$P = 45\pi + 16\pi$$ $$P = 61\pi$$	1	Poprawna metoda wyznaczania całej powierzchni.
Odpowiedź: Na wykonanie czapki czarnoksiężnika potrzeba 61π centymetrów kwadratowych brystolu.	1	Zadanie rozwiązane bez błędów rachunkowych.